О квазипериодических, но не периодических элементах специального класса функциональных непрерывных дробей

М.М. Петрунин[1]

[1]НИЦ «Курчатовский институт» – НИИСИ, Москва, Россия, petrushkin@yandex.ru

Аннотация. В работе М.М. Петрунин "Об одном классе периодических элементов гиперэллиптических полей", Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 4 в случае произвольной нечетной степени многочлена f над произвольным полем алгебраических чисел $\mathbb{K}$ был получен класс всегда квазипериодических в $\mathbb{K}((x))$ элементов и выделен подкласс всегда периодических элементов вида $\frac{v+w\sqrt{f}}{u}$, задаваемые только соотношениями на многочлены $u,v,w,f\in\mathbb{K}[x]$ и их степени. Класс не пуст при наличии в гиперэллиптическом поле хотя бы одного квазипериодического элемента. В настоящей работе построены новые примеры периодических, а также построены примеры квазипериодических, но не периодических элементов вышеуказанного класса квазипериодических элементов.

Ключевые слова: гиперэллиптическое поле, непрерывные дроби, функциональные непрерывные дроби, S-единицы, периодичность, квазипериодичность

1. Введение

Исследование проблемы периодичности функциональных непрерывных дробей в гиперэллиптических полях было начато в работах Абеля [2] и Чебышёва [3]. В XX и XXI веках классические результаты получили современное изложение, и для гиперэллиптических полей, заданных многочленами чётной степени, была развита теория функциональных непрерывных дробей в $\mathbb{K}((1/x))$ (см. например, [4], [5], [6], [7]). Основы для изучения непрерывных дробей в $\mathbb{K}((x))$ были заложены в работе [8], в которой впервые глубокие результаты по проблеме периодичности функциональных непрерывных дробей были получены для гиперэллиптических полей, определяемых многочленами нечётной степени. Дальнейшее развитие этот случай получил в работах [9, 10, 11, 12], где, в частности, были получены результаты, связанные с элементом $\sqrt{f}$. В связи с тем, что это лишь один из элементов гиперэллиптического поля, возникает естественный вопрос: насколько широк класс квазипериодических и периодических элементов. В. П. Платонов предложил исследовать его в случае, когда гиперэллиптическое поле порождается многочленом нечётной степени.

В случае $\mathbb{K}((1/x))$ гиперэллиптического поля, порожденного многочленом четной степени, в работе [13] был получен класс квазипериодичных элементов. Доказательство было проведено с рассмотрением последовательности дивизоров нулей и полюсов полных частных разложения в непрерывную дробь квадратичной иррациональности.

В работе [1] было получено альтернативное компактное доказательство аналогичного результата для $\mathbb{K}((x))$ в случае многочлена нечетной степени, а также впервые выделен подкласс периодических элементов.

Теорема ([1]). *Пусть $f\in\mathbb{K}[x]$ — бесквадратный многочлен степени $2g+1$. Если в поле $L=\mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$, есть квазипериодические в $\mathbb{K}((x))$ элементы, то квазипериодичны элементы α, представимые в виде несократимой дроби $\alpha=\frac{v+x^i\sqrt{f}}{x^j r}$, $r\mid v^2-x^{2i}f$, $i,j\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $deg v\le\sigma+i$, $deg r=\sigma+i-j$, $j-i\le\sigma$, где $\sigma=g$ или $\sigma=g+1$.*

Более того, если $v=0$, $x\nmid r$ и $deg r\ne\sigma$, или $r\in\mathbb{K}$ или $x^{t+j}r=v^2-x^{2i}f$, то такие элементы периодичны. В последнем случае $t=i+g$ или $t=i+g+1$, и или $i=0$ или $j=0$.

Критерий квазипериодичности (см. работы [6, 10]) накладывает жесткие условия на элементы гиперэллиптического поля. В силу этого, квазипериодичность и тем более периодичность — редкие явления. При наличии в гиперэллиптическом поле хотя бы одного квазипериодического элемента теорема позволяет выделить класс всегда квазипериодичных элементов. Более того, она постулирует периодичность широкого подкласса. Однако, как показано в работе [1], если элементы класса, выделенного в теореме, содержат в разложении многочлена $v^2 - x^{2i} f$ множители отличные от r или степени x, то они могут быть квазипериодичны, но не периодичны. В настоящей работе впервые построены примеры, как квазипериодических, но не периодических, так и периодических элементов класса квазипериодических элементов, выделенного в теореме, в случае $v = 0$.

2. Примеры

Рассмотрим случай, когда $v = 0$, но $\deg r = g + 1$.

Пример 1. *Пусть* $\alpha = \dfrac{\sqrt{f}}{r}$, *где*

$$f = \left(2x^2 - 2x - 1\right)\left(3x+1\right)\left(2x+1\right)\left(x-1\right), \qquad r = \left(2x^2 - 2x - 1\right)\left(x-1\right).$$

Тогда α *обладает квазипериодическим, но не периодическим разложением в непрерывную дробь:*

$$\alpha = [1, \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}, \overline{-\frac{8}{3x} - 4, \frac{3}{8x} + \frac{9}{16}, -\frac{32}{9x} - \frac{16}{9}, \frac{9}{32x} + \frac{9}{64}}^{\frac{16}{9}}].$$

Длина квазипериода равна 4, *а коэффициент квазипериодичности равен* $16/9$.

В то же время, при сохранении многочлена f, но взять в качестве r множитель степени $\deg r = g$, то разложение уже будет периодичным.

Пример 2. *Пусть* $\alpha = \dfrac{\sqrt{f}}{r}$, *где*

$$f = \left(2x^2 - 2x - 1\right)\left(3x+1\right)\left(2x+1\right)\left(x-1\right), \qquad r = 2x^2 - 2x - 1.$$

Тогда α *обладает периодическим разложением в непрерывную дробь с длиной периода* 6:

$$\alpha = [-1, -\frac{1}{x} - 1, \overline{-\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x^2} + 2, -\frac{1}{x} - \frac{3}{2}, \frac{4}{x} + 6}^{-\frac{1}{4}}]$$

Длина квазипериода равна 3, *а коэффициент квазипериодичности равен* $-1/4$.

Однако степень множителя f не является определяющим фактором, и для фиксированного f при степенях множителя $\deg r = g$ и $\deg r = g + 1$ могут встречаться все возможности. Как непериодичность:

Пример 3. *Пусть* $\alpha = \dfrac{\sqrt{f}}{r}$, *где*

$$f = \left(2x^2 - 2x - 1\right)\left(3x+1\right)\left(2x+1\right)\left(x-1\right), \qquad r = \left(2x+1\right)\left(x-1\right).$$

Тогда α *обладает квазипериодическим, но не периодическим разложением в непрерывную дробь:*

$$\alpha = [-1, -\frac{1}{2x} - \frac{1}{4}, \overline{\frac{8}{3x} + \frac{4}{3}, -\frac{3}{8x} - \frac{3}{16}, \frac{32}{9x} + \frac{16}{3}, -\frac{9}{32x} - \frac{27}{64}}^{\frac{16}{9}}].$$

Длина квазипериода равна 4, *а коэффициент квазипериодичности равен* $16/9$.

Так и периодичность:

Пример 4. *Пусть* $\alpha = \dfrac{\sqrt{f}}{r}$, *где*

$$f = \left(2x^2 - 2x - 1\right)\left(3x+1\right)\left(2x+1\right)\left(x-1\right), \quad r = \left(2x^2 - 2x - 1\right)\left(2x+1\right).$$

Тогда α *обладает периодическим разложением в непрерывную дробь с длиной периода 6:*

$$\alpha = [-1, \frac{1}{x}+1, \overline{-\frac{2}{x} - \frac{2}{3x^2} + \frac{2}{3}, \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, -\frac{4}{x} - 2}^{-\frac{1}{4}}].$$

Длина квазипериода равна 3, а коэффициент квазипериодичности равен - 1/4.

3. Заключение

Работа выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований, проект FNEF-2024-0001.

On Quasiperiodic but Nonperiodic Elements of a Special Class of Functional Continued Fractions

M.M Petrunin

Abstract. In the paper [1] for an arbitrary odd-degree polynomial f over an arbitrary field of algebraic numbers $\mathbb{K}$, a class of elements in $\mathbb{K}((x))$ was identified that are always quasiperiodic, and a subclass of always periodic elements of the form $\dfrac{v + w\sqrt{f}}{u}$ was distinguished. These are defined solely by relations on the polynomials $u, v, w, f \in \mathbb{K}[x]$ and their degrees. This class is non-empty if at least one quasiperiodic element exists in the hyperelliptic field. In the present work, new examples of periodic elements are constructed, as well as examples of quasiperiodic but non-periodic elements within the aforementioned class of quasiperiodic elements.

Keywords: hyperelliptic field, continued fractions, functional continued fractions, S-units, periodicity, quasiperiodicity

Литература

1. Петрунин М. М. Об одном классе периодических элементов гиперэллиптических полей. «Чебышевский сборник». 2024, Т. 25, № 4.

2. Abel N.H. Ueber die Integration der Differential-Formel $\rho dx / \sqrt{R}$ wenn R und ρ ganze Functionen sind. «Journal für die reine und angewandte Mathematik». 1826, Vol. 1, P. 185–221.

3. Tchebicheff P. Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisieme ou du quatrieme degré'. «Journal des math. pures et appl.» 1857, Vol. 2, P. 168–192.

4. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел. «Успехи Математических Наук». 2014, Т. 69:1, № 415, С. 3–38.

5. Adams William W., Razar Michael J. Multiples of point on elliptic curves and continued fractions. «Proc. London Math. Soc.». 1980, Vol. 41, no. 3. P. 481–498.

6. Schmidt Wolfgang M. On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields. «Acta arithmetica». 2000, Vol. 95, no. 2, P. 139–166.

7. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. «Acta Arithmetica». 1961, Vol. 6, №. 4, P. 393-413.

8. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби. «Математический сборник». 2009. Т. 200, № 11. С. 15–44.

9. Петрунин М. М. S-единицы и периодичность квадратного корня в гиперэллиптических полях. «Доклады Академии наук». 2017. Т. 474, №. 2, – С. 155-158.

10. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях. «Тр. МИАН». 2018.

11. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях. «Математический сборник». 2018. Т. 209, № 4, С. 54–94.

12. Платонов В. П. Об описании периодических элементов эллиптических полей, заданных многочленом третьей степени. «Успехи Математических Наук». 2024, Т. 79, В. 6.

13. Berry T.G. On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields. «Arch. Math. (Basel)». 1990, Vol. 55, no. 3, P. 259–266.