

Стационарные состояния резисторной матрицы

В. Б. Котов¹, Г. А. Бесхлебнова²

¹ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва, Россия, kotov.vlb@yandex.ru

²ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва, Россия, gab19@list.ru

Аннотация. Основой многих нейроморфных систем является векторно-матричный множитель. Он может быть реализован с помощью резисторной матрицы. Наибольший интерес представляют резисторные матрицы с переменными резисторами, меняющими сопротивление под действием протекающего по ним тока. Возникает задача формирования матрицы проводимостей резисторов, приводящей к умножению на нужную матрицу. В общем случае из-за относительно малого числа управляющих сигналов (напряжений) и отсутствия доступа к отдельному резистору эта задача не имеет решения. Разумно выбрать удобные методы формирования матрицы проводимостей и описать множества матриц проводимости, формируемых при использовании каждого метода или сочетания методов. Наиболее простой и устойчивой является процедура формирования матрицы проводимостей, при которой на вход системы подаются постоянные напряжения и система движется к стационарному состоянию. В настоящей работе рассмотрены два режима такой процедуры – режим прямого подключения и режим двухполюсника. Изучены стационарные состояния резисторной матрицы для этих режимов и разработаны наглядные упрощенные описания результата формирования матрицы проводимости в каждом режиме. Хотя условия применимости упрощенных описаний на практике не всегда выполняются, соответствующие «идеальные» состояния обычно могут быть использованы для классификации реальных стационарных состояний.

Ключевые слова: резисторная матрица, векторно-матричное умножение, переменный резистор, сигнатурная матрица, матрица проводимостей, стационарные состояния

1. Введение

Резисторные матрицы позволяют эффективно реализовать ключевую операцию высокопараллельных нейроморфных вычислений – векторно-матричное умножение [1,2]. Если резисторы матрицы переменные, имеется возможность использовать одну и ту же схему для умножения на различные матрицы. С практической точки зрения наиболее интересны переменные резисторы, меняющие своё сопротивление под действием протекающего тока («мемристоры», «мемристорные элементы» [1,3]). Главная проблема при использовании матрицы переменных резисторов в качестве векторно-матричного множителя – сформировать необходимую матрицу [4]. Источником трудностей является огромное число резисторов, значительно превышающее число управляющих сигналов. Кроме того, необходимо минимизировать использование нерезисторных элементов (диодов, транзисторов), поскольку большое количество таких элементов (порядка числа переменных резисторов) обесценивает выгоды использования переменных резисторов, такие как малые размеры и низкое энергопотребление.

Задача нахождения сигналов (напряжений), приводящих к формированию требуемой матрицы-сомножителя, поддаётся решению только для тривиальных случаев. Слишком много фак-

торов влияют на результат – матрицу проводимостей переменных резисторов, которая определяет матрицу-сомножитель [4]. Такие критические факторы, как начальные условия и характеристики переменных резисторов, точно не известны. Более того, во многих случаях обратная задача вообще не имеет решения. Представляется разумным начать с решения прямой задачи для широкого класса характеристик и управляющих сигналов и описать многообразие формируемых матриц проводимостей. Даже если среди формируемых матриц не окажется требуемой матрицы, её подчас можно получить с помощью легко реализуемых операций, таких как умножение на постоянную матрицу и прибавление постоянной матрицы.

Наиболее простой и устойчивой является процедура формирования матрицы проводимостей, при которой на вход системы подаются постоянные напряжения и система движется к стационарному состоянию. Формирующаяся через некоторое время матрица проводимостей является продуктом схемы при заданных напряжениях. Меняя напряжения, можно получать матрицы некоторого многомерного многообразия. Его размерность определяется числом управляющих напряжений. Перемещение в пространстве матриц можно использовать для решения задач оптимизации [4]. Указанная процедура формирования матрицы проводимостей удобна

тем, что результат не сильно зависит от времени формирования. Кроме того, для такой процедуры в ряде случаев можно использовать упрощенные описания, делающие её результат понятным и предсказуемым.

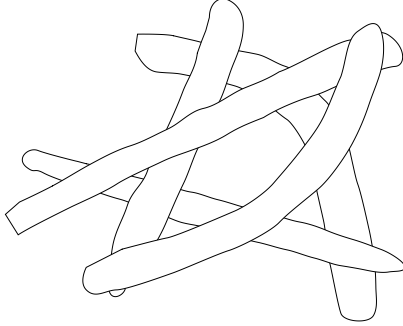


Рис. 1. Пересекающиеся проводники

В связи с вышесказанным представляется актуальным рассмотрение стационарных состояний резисторной матрицы. Считаем, что переменные резисторы образуются при контакте пар проводников. Предполагаем, что переменные резисторы однонаправленные и описываются моделью простого резисторного элемента [5].

2. Резисторная матрица

Пусть имеем m произвольно расположенных проводников (рис. 1). Проводники могут попарно контактировать друг с другом. В месте контакта образуется переменный резистор. Проводники подключаются к источникам напряжения через постоянные резисторы.

Обозначим потенциал i -го проводника ϕ_i , потенциал источника для этого проводника ϕ_i , проводимость постоянного резистора между источником и проводником g_i , проводимость переменного резистора между i -ым и j -ым проводниками G_{ij} . Токи и напряжения на резисторах обозначаем I и u соответственно с индексами, нумерующими резисторы. По определению

$$u_{ij} = \phi_i - \phi_j. \quad (1)$$

Величины G_{ij} , I_{ij} , u_{ij} образуют матрицы с нулевыми диагоналями, причём матрица проводимостей симметричная, а матрицы токов и напряжений антисимметричные. Предполагаем, что на коротких временных отрезках, на которых проводимости можно считать постоянными, выполняется закон Ома

$$I_{ij} = G_{ij}u_{ij}. \quad (2)$$

Запишем закон Ома для постоянного резистора

$$I_i = g_i u_i, \quad (3)$$

причём

$$u_i = \phi_i - \phi_i, \quad (4)$$

$$I_i = \sum_{j=1}^m I_{ij}. \quad (5)$$

Из соотношений (1)-(5) получается система m линейных уравнений с m неизвестными ϕ_i , $i =$

$1, \dots, m$:

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} \phi_j = \psi_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

где $A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{G_{ij}}{g_i + g_j}$, $\psi_i = \frac{g_i}{g_i + g_i} \phi_i$, $G_i = \sum_{j=1}^m G_{ij}$. Невырожденная матрица $A = [A_{ij}]$ [4] имеет обратную матрицу A^{-1} . Решение системы (6) запишем в виде

$$\phi_i = \sum_{j=1}^m A_{ij}^{-1} \phi_j. \quad (7)$$

Потенциалы источников ϕ_i – входные сигналы рассматриваемой схемы. В качестве выходных сигналов можно взять токи или напряжения постоянных резисторов. Для них можно записать выражения

$$u_i = \frac{I_i}{g_i} = \sum_{j=1}^m B_{ij} \phi_j, \quad B_{ij} = \delta_{ij} - A_{ij}^{-1} \frac{g_j}{g_i + g_j}. \quad (8)$$

Как видим, переход от вектора потенциалов $[\phi_i]$ к вектору напряжений $[u_i]$ осуществляется путём умножения на матрицу $B = [B_{ij}]$. Заметим, что потенциалы определяются с точностью аддитивной постоянной. Поэтому реально имеется $m-1$ входных сигналов. Легко видеть, что напряжения u_i не зависят от выбора начала отсчёта потенциалов.

Элементы матрицы B сложным образом выражаются через проводимости резисторов. Однако в случае, когда проводники напрямую подключены к источникам напряжения (проводимости g_i велики), формулы упрощаются. В пределе $g_i \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, m$, получаем

$$I_i = \sum_{j=1}^m G_{ij}(\phi_i - \phi_j) = G_i \phi_i - \sum_{j=1}^m G_{ij} \phi_j. \quad (9)$$

Здесь элементы матрицы перехода непосредственно выражаются через проводимости переменных резисторов. Поэтому такой режим работы резисторной матрицы, называемый режимом прямого подключения, удобен для считывания проводимостей переменных резисторов. Подав ненулевой потенциал на один из проводников и заземлив остальные проводники ($\phi_k \neq 0$, $\phi_i = 0$, $i \neq k$), получим $I_i = G_{ik} \phi_k$, $i \neq k$. Перебрав все значения k , найдём проводимости всех резисторов. Заметим, что считывание проводимостей переменных резисторов производится при подаче небольших напряжений на источники напряжения в течение коротких интервалов времени, при этом проводимости резисторов заметно не меняются. Как мы увидим ниже, режим прямого подключения может быть полезен и при формировании матрицы проводимостей.

Другой простой и полезный режим работы получается, когда только два (или несколько) проводников подключены к источникам напряжения, а остальные проводники изолированы (соответствующие $g_i \rightarrow 0$). Такой режим называем режимом двухполюсника (трёхполюсника

и т.д.). Здесь не удаётся получить простые формулы. Однако такой режим позволяет использовать описание на основе рассмотрения путей протекания тока от положительного полюса к отрицательному (см. ниже).

3. Эволюция матрицы проводимостей

Протекание тока через переменный резистор приводит к изменению его проводимости. Изменение проводимости может происходить и самопроизвольно – в результате релаксации к основному состоянию. Ограничимся здесь рассмотрением однонаправленных резисторов, которые увеличивают проводимость под действием тока одного направления (направления резистора) и уменьшают проводимость под действием тока противоположного направления. Релаксация к основному состоянию также приводит к уменьшению проводимости. Считаем, что поведение резистора описывается моделью простого резисторного элемента [5].

Проводимость простого резисторного элемента выражается через переменную состояния: $G_{ij}=G_{ij}(x_{ij})$. Примем линейную зависимость:

$$G_{ij} = G_{0ij} + \Delta G_{ij} x_{ij}, \quad (10)$$

где $G_{0ij} = G_{ij}(0)$, $\Delta G_{ij} = G_{ij}(1) - G_{ij}(0)$, $0 \leq x_{ij} \leq 1$.

Направления резисторов матрицы описываются антисимметричной сигнатурной матрицей $s=[s_{ij}]$. $s_{ij}=1$, если направление от i -го проводника к j -му проводнику совпадает с направлением ij -го резистора, $s_{ij}=-1$, если указанные направления противоположны, $s_{ij}=0$, если ij -резистор отсутствует.

Изменение переменной состояния ij -резистора описывается уравнением

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = F_{ij}(x_{ij}, s_{ij} I_{ij}). \quad (11)$$

Считаем справедливым следующее представление [5] для функций F_{ij} :

$$F(x, I) = F_0(x) + F_x^+(x) F_I^+(I) + F_x^-(x) F_I^-(I) \quad (12)$$

(индексы “ ij ” для краткости опускаем). Такое представление сводит описания переменных резисторов к заданию характеристических функций одной переменной $F_0(x)$, $F_x^\pm(x)$, $F_I^\pm(I)$.

Первый член в правой части (12) отвечает за самопроизвольную релаксацию к основному состоянию $x=0$ с низкой проводимостью. Для этого значения функции F_0 должны быть отрицательными при $0 < x < 1$. Если $F_0(0) < 0$ или $F_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ медленнее, чем x^1 , основное состояние достигается за конечное время, после чего резистор остается в этом состоянии, пока не включат ток. В противном случае стремление к основному состоянию асимптотическое – всегда $x > 0$, если это неравенство выполнялось в начальный

момент времени. Для аппроксимации функции $F_0(x)$ можно использовать выражение

$$F_0(x) = -f_0(x)(x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \quad (13)$$

где α_0, α_1 – неотрицательные показатели степени, $f_0(x)$ – положительная функция, $x_0 \leq 0, x_1 \geq 1$. Согласно экспериментальным данным [5] во многих случаях можно считать, что $x_0=0, x_1=1$. При этом $F_0(0)=F_0(1)=0$ – скорость релаксации мала как в низкопроводящем ($x \approx 0$), так и в высокопроводящем ($x \approx 1$) состоянии.

С методической точки зрения полезным может быть использование постоянной функции

$$F_0(x) = -f. \quad (14)$$

Конечно, вне отрезка $[0,1]$ должно быть $F_0(x)=0$.

Второй член в правой части равенства (12) описывает тенденцию увеличения переменной x , (и проводимости резистора), когда направление тока совпадает с направлением резистора. Он положителен при $I > 0$ и равен нулю при $I \leq 0$. Входящие в него характеристические функции имеют следующие свойства

$$F_x^+(x) > 0, \text{ при } 0 < x < 1,$$

$$F_I^+(I) = 0, \text{ при } I \leq 0, \quad (15)$$

$$F_I^+(I) > 0, \quad \frac{dF_I^+(I)}{dI} > 0, \text{ при } I > 0.$$

Для характеристической функции $F_x^+(x)$ можно записать аппроксимацию, аналогичную формуле (13). Однако следует ожидать, что при $x=0$ эта функция не равна нулю и даже имеет здесь максимум. При этом можно использовать более простое выражение

$$F_x^+(x) = (1 - x)^{\gamma_+} \quad (16)$$

(γ_+ – неотрицательный показатель степени).

При $\gamma_+=0$ получаем постоянную функцию.

Третий член в правой части равенства (12) описывает ускоренную релаксацию к основному состоянию, когда направление тока противоположно направлению резистора. Он отрицателен при $I < 0$ и равен нулю при $I \geq 0$. Свойства входящих в него характеристических функций аналогичны свойствам (15):

$$F_x^-(x) > 0, \text{ если } 0 < x < 1,$$

$$F_I^-(I) = 0, \text{ если } I \geq 0, \quad (17)$$

$$F_I^-(I) < 0, \quad \frac{dF_I^-(I)}{dI} > 0, \text{ если } I < 0.$$

Для характеристической функции $F_x^-(x)$ используем выражение

$$F_x^-(x) = x^{\gamma_-} \quad (18)$$

с неотрицательным показателем степени γ_- .

Для характеристических функций $F_I^\pm(I)$ наиболее типичны степенные зависимости:

$$F_I^+(I) = \begin{cases} 0, & \text{если } I \leq 0 \\ A^+ I^{\beta_+}, & \text{если } I > 0 \end{cases}, \quad (19)$$

$$F_I^-(I) = \begin{cases} 0, & \text{если } I \geq 0 \\ A^- (-I)^{\beta_-}, & \text{если } I < 0 \end{cases}, \quad (20)$$

где A^+ , A^- – положительные коэффициенты, характеризующие интенсивность процессов записи (увеличения проводимости) и стирания (уменьшения проводимости), β_+ , β_- – положительные показатели степени. Результаты экспериментов показывают, что для многих переменных резисторов показатели степени близки к единице. Если к тому же $A^+=A^-$, получаем линейные зависимости, постулированные для классического мемристора [6].

Заметим, что принятые допущения следует рассматривать как наиболее типичные для интегральных с точки зрения практического использования переменных резисторов. В принципе возможны резисторы, для которых некоторые из этих условий нарушаются.

Токи резисторов I_{ij} в уравнениях (11) выражаются через заданные потенциалы источников согласно формулам (1), (2), (7). Ток через данный резистор зависит не только от проводимости этого резистора, но и от проводимостей всех остальных резисторов. Поэтому изменение состояния данного резистора зависит от состояний всех резисторов. Исключение составляют случаи обесточенной схемы и режим прямого подключения, который мы подробно рассмотрим ниже.

4. Стационарные состояния отдельного резистора

При заданном напряжении u на резисторе уравнение (11) записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = H(x, u), \quad (21)$$

где $H(x, u) = F(x, G(x)u)$. В качестве положительного направления тока и напряжения выбрано направление резистора. Внутренние стационарные точки уравнения (21) определяются из уравнения

$$H(x, u) = 0. \quad (22)$$

Стационарная точка (состояние) x_{st} устойчивая, если слева от неё $H > 0$, а справа от неё $H < 0$, так что при небольшом отклонении от стационарной точки изображающая точка стремится вернуться к ней.

Помимо внутренних стационарных точек (состояний) могут быть граничные стационарные точки. Основное состояние $x=0$ является устойчивым стационарным состоянием, если $H(x, u) < 0$ при малых положительных x , и неустойчивым стационарным состоянием, если $H(0, u) = 0$, $H(x, u) > 0$ при малых положительных x . Аналогично граничное состояние $x=1$ является устойчивым стационарным состоянием, если $H(x, u) > 0$ при $x \approx 1$ ($x < 1$), и неустойчивым стационарным состоянием, если $H(0, u) = 0$, $H(x, u) < 0$ при $x \approx 1$ ($x < 1$).

При $u < 0$ согласно принятым предположениям $H(x, u) < 0$ при $x > 0$. Поэтому единственным стационарным состоянием (устойчивым) является основное состояние $x=0$.

При $u=0$ аналогичная ситуация. Однако здесь в случае $F_0(1)=0$ появляется дополнительное стационарное состояние $x_{st}=1$. Хотя это стационарное состояние неустойчивое, оно может оказаться очень важным для приложений переменных резисторов. Выход из окрестности этого состояния может потребовать значительного времени, что позволяет реализовать долговременную память при отключении от источника напряжения. Более того, если $\alpha_1 \geq 1$, то при приближении начального состояния к состоянию $x=1$ время выхода из окрестности этого состояния растёт неограниченно.

При $u > 0$ правая часть уравнения (21) может быть как отрицательной, так и положительной. Уравнение (22) определяет на плоскости (x, u) кривую, разделяющую области $H > 0$ и $H < 0$, в которых переменная состояния x имеет тенденцию роста и убывания соответственно. Уравнение (22) с учётом выражения (15) можно записать в виде, разрешённом относительно переменной u :

$$u = v(x) \equiv \frac{1}{G(x)} h\left(-\frac{F_0(x)}{F_x^+(x)}\right), \quad (23)$$

где $h(z)$ – функция, обратная функции $F_l^+(I)$. Эта функция определена при $z \geq 0$, является монотонно возрастающей и $h(0)=0$. Для характеристической функции вида (19) получаем

$$h(z) = \left(\frac{z}{A}\right)^{1/\beta} \quad (24)$$

(индекс «+» для краткости опускаем).

Чтобы получить зависимость внутренней стационарной точки от заданного напряжения $x_{st}(u)$, нужно обратить функцию $v(x)$. Если функция $v(x)$ монотонная, зависимость $x_{st}(u)$ однозначная. В противном случае получаем многозначную зависимость – для значений напряжения u из некоторого диапазона имеется несколько стационарных состояний в интервале $(0, 1)$. Нетрудно видеть, что стационарное состояние $x=x_{st}$ устойчивое, если кривая (23) имеет в этой точке положительный наклон, при отрицательном наклоне стационарное состояние неустойчивое.

В типичном случае, когда функция $v(x)$ имеет при $0 < x < 1$ один локальный максимум и один локальный минимум со значениями v_{max} и v_{min} , зависимость $x_{st}(u)$ при $u_{min} < u < u_{max}$ оказывается трехзначной (рис. 2). В этом диапазоне напряжений имеются три стационарные точки (состояния), из которых две крайние – устойчивые, а средняя – неустойчивая стационарная точка. На рис. 2 изображены одномерные траектории движения изображающей точки. Видно, что не-

устойчивая стационарная точка разделяет отрезок $[0,1]$ на области притяжения устойчивых стационарных точек. Наличие двух устойчивых стационарных точек позволяет говорить о бистабильности.

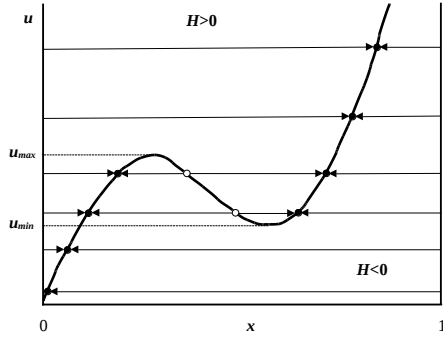


Рис. 2. Одномерные траектории для случая немонотонной функции $v(x)$

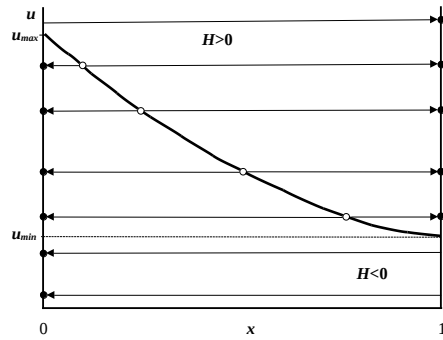


Рис. 3. Случай убывающей функции $v(x)$

Первый множитель в определении функции $v(x)$ в (23), а именно $1/G(x)=R(x)$ (сопротивление резистора) является убывающей функцией переменной x . Второй множитель может иметь разные свойства монотонности в зависимости от вида характеристических функций $F_x^+(x)$, $F_0(x)$, однако наиболее типичной тенденцией является рост этого множителя при увеличении x . Рассмотрим примеры конкретного выбора этих характеристических функций.

Пусть $F_x^+(x) = 1$, $F_0(x) = -f$ (постоянные характеристические функции). Здесь

$$v(x) = \left(\frac{f}{A}\right)^{1/\beta} \frac{1}{G(x)} \quad (25)$$

– убывающая функция (рис. 3). Ниже кривой $H=0$ расположена область $H<0$, а выше область $H>0$. Внутренние стационарные точки, определяемые уравнением $H=0$, являются неустойчивыми. Устойчивые стационарные точки – это граничные точки: $x=0$ при $u < u_{max}=v(0)$ и $x=1$ при $u > u_{min}=v(1)$. В диапазоне напряжений $u_{min} < u < u_{max}$ имеет место бистабильность. Заметим, что кривую $u=v(x)$ на рисунке 3 можно рассматривать

как предельный случай кривой на рис. 2, когда средняя (убывающая) часть кривой расширяется и захватывает весь интервал $(0,1)$ переменной x .

Пусть теперь характеристические функции $F_x^+(x)$, $F_0(x)$ определяются согласно формулам (16), (13) при $x_0=0$, $x_1=1$. Здесь функция $v(x)$ имеет вид

$$v(x) = \left(\frac{f(x)}{A}\right)^{1/\beta} \frac{x^{\alpha_0/\beta} (1-x)^{(\alpha_1-\gamma)/\beta}}{G(x)}. \quad (26)$$

При малых x функция $v(x)$ растёт по степенному закону: $v(x) \sim x^{\alpha_0/\beta}$. Если $\alpha_1 > \gamma$, то $v(1)=v(0)=0$ – функция $v(x)$ имеет максимум при $0 < x < 1$ (рис. 4). В диапазоне напряжений $0 < u < u_{max}$ имеет место бистабильность: меньшая устойчивая стационарная точка задаётся восходящей частью кривой $u=v(x)$, большая устойчивая стационарная точка – это граничная точка $x=1$. Нисходящая часть кривой $u=v(x)$ задаёт неустойчивую стационарную точку.

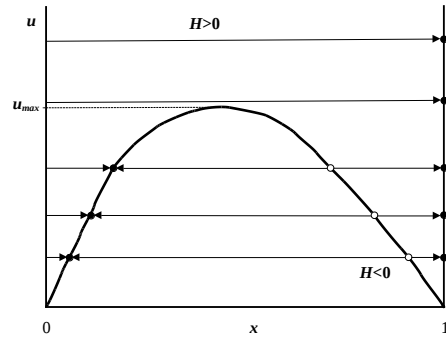


Рис. 4. Одномерные траектории для случая $v(0)=v(1)=0$

Более реально выполнение противоположного условия: $\alpha_1 < \gamma$. В этом случае $v(x \rightarrow 1) \rightarrow \infty$. Функция $v(x)$ растущая как в окрестности граничной точки $x=0$, так и в окрестности граничной точки $x=1$. Немонотонность этой функции и связанная с ней бистабильность могут появиться за счёт быстрого убывания функций $f(x)$ и $R(x)$. В частности, при $f(x)=\text{const}$, бистабильность возможна только при выполнении условия $\alpha_0 < \beta$ и при достаточно высоком контрасте: $\Delta G/G_0 \gg 1$. Убывающая функция $f(x)$ позволяет ослабить эти условия, однако при малом контрасте бистабильность невозможна. Экспериментальные данные работы [5] показывают справедливость соотношений $\alpha_1 < \gamma$, $\alpha_0 > \beta \approx 1$. При этом кривая $u=v(x)$ имеет вид как на рисунке 2 с более или менее выраженными максимумом и минимумом или с отсутствием таковых. В любом случае все стационарные точки определяются кривой $u=v(x)$. При малых напряжениях u имеется единственное стационарное состояние (устойчивое) $x=x_{sr} \approx 0$. При больших напряжениях также имеется един-

ственное стационарное состояние $x=x_{st}\approx 1$. Такую картину следует рассматривать как типичную.

При промежуточных значениях положительного напряжения картина усложняется. Стационарные значения переменной состояния могут меняться в широких пределах, возможно наличие нескольких стационарных состояний (обычно два устойчивых и одно неустойчивое).

Заметим, что при измерениях обычно последовательно с переменным резистором включают постоянный резистор, служащий для ограничения тока при малом сопротивлении переменного резистора. Проведённые рассуждения остаются в силе, если произвести перенормировку сопротивления переменного резистора: $R(x)\rightarrow R(x)+r$ (где r – сопротивление постоянного резистора). В результате перенормировки уменьшается контраст $G(1)/G(0)=R(0)/R(1)$, что уменьшает диапазон бистабильности или даже делает её невозможной.

До сих пор мы рассматривали стационарные состояния переменного резистора при заданном напряжении. Если вместо источника напряжения использовать источника тока, то нужно рассматривать стационарные состояния при заданном токе I . Для нахождения внутренних стационарных точек при положительном токе вместо уравнения (22) надо решать уравнение

$$F(x, I) = 0. \quad (27)$$

Это уравнение можно разрешить относительно переменной I :

$$I = h\left(-\frac{F_0(x)}{F_x^+(x)}\right). \quad (28)$$

Если обратить зависимость (28), получим зависимость стационарного состояния от тока $x=x_{st}(I)$. Зависимость (28) отличается от зависимости (23) отсутствием убывающего множителя $R(x)=1/G(x)$. Это затрудняет проявление бистабильности. Правда, в некоторых экзотических случаях (таких как случай рис. 3) зависимость (28) оказывается немонотонной, однако для реальных резисторов такое едва ли возможно.

Следует отметить, что использование источников тока при работе с переменными резисторами весьма проблематично при больших изменениях сопротивления, поскольку при большом сопротивлении заданный ток приводит к значительному выделению тепла, что может привести к повреждению резистора. На практике обычно используют режим заданного напряжения с ограничением тока.

5. Стационарные состояния резисторной матрицы

Стационарные состояния матрицы резисторов являются решениями системы уравнений,

получающих путём приравнивания нулю правых частей уравнений (11)

$$F_{ij}(x_{ij}, s_{ij}I_{ij}) = 0. \quad (29)$$

Число уравнений равно числу резисторов. Для полной матрицы это число равно $m(m-1)/2$. Токи I_{ij} должны быть выражены через заданные потенциалы источников:

$$I_{ij} = G_{ij} \sum_{k=1}^m (A_{ik}^{-1} - A_{jk}^{-1}) \frac{g_k}{g_k + g_j} \phi_k. \quad (30)$$

Эти токи сложным образом зависят от проводимостей G_{ij} , а значит и от переменных состояния x_{ij} . В общем случае система уравнений (11) и даже система уравнений (29) не поддаются аналитическому решению.

Однако в режиме прямого подключения ситуация сильно упрощается.

5.1. Режим прямого подключения

Здесь формула (30) принимает вид

$$I_{ij} = G_{ij} u_{ij} = G_{ij} (\phi_i - \phi_j). \quad (31)$$

Уравнения (11) (или (29)) не связаны между собой. Каждый переменный резистор можно рассматривать независимо от других. Стационарные состояния резистора при заданном напряжении на нём рассмотрены в разделе 4.

Чтобы избежать неоднозначностей, связанных с промежуточными значениями напряжений (в частности, с бистабильностью), все напряжения u_{ij} должны быть или велики по абсолютной величине или близки к нулю. Этого можно достичь, если использовать малое число разнесённых потенциалов источников. Точнее, разобьём множество номеров проводников $M=\{1, \dots, m\}$ на K непересекающихся подмножеств: $M=M_1 \cup \dots \cup M_K$. Число элементов подмножества M_i обозначим m_i . Источники напряжения с номером из одного подмножества имеют одинаковый потенциал, разность потенциалов между источниками с номерами из разных подмножеств достаточно велика по абсолютной величине для того, чтобы существенно повлиять на состояние соответствующего резистора. Число подмножеств K не может быть велико (обычно 2, 3), поскольку при больших K максимальное значение напряжения на резисторах окажется слишком большим, что приведёт к повреждению резисторов.

При подобном распределении потенциалов источников можно воспользоваться упрощённым описанием. Введём матрицу p с элементами

$$p_{ij} = \text{sign}(u_{ij}) = \text{sign}(\phi_i - \phi_j), \quad (32)$$

где sign – функция знака, равная -1 при отрицательном значении аргумента, равная 1 при положительном значении аргумента и равная 0, если аргумент равен 0. Матрицу p по аналогии с матрицей s можно назвать матрицей сигнатуры напряжений. Матрица p антисимметричная, как и матрица s . По сравнению с матрицей s матрица

имеет больше нулей. Для полной резисторной матрицы матрица s имеет нули только на диагонали. Дополнительные нулевые элементы матрицы p имеют номера строки и столбца, принадлежащие к одному подмножеству индексов.

Наконец, введём матрицу q с элементами

$$q_{ij} = s_{ij}p_{ij}. \quad (33)$$

Матрица q учитывает согласованность напряжений резисторов с направлениями резисторов. Матрица q симметричная и имеет столько же нулей, что и матрица p . Если $q_{ij}=0$, ток через ij -резистор не течёт, изменение состояния этого резистора связано только с медленной релаксацией, которую можно не учитывать при малых временах формирования. Если $q_{ij}=1$, положительный ток через ij -резистор стремится приблизить состояние этого резистора к высокопроводящему состоянию $x=1$. Если $q_{ij}=-1$, отрицательный ток стремится приблизить состояние ij -резистора к низкопроводящему состоянию $x=0$. В итоге получаем следующую формулу преобразования состояний резисторов

$$\begin{aligned} q_{ij} = 1: x_{ij} &\rightarrow 1, \\ q_{ij} = -1: x_{ij} &\rightarrow 0, \\ q_{ij} = 0: x_{ij} &= x_{ij}(0). \end{aligned} \quad (34)$$

($x_{ij}(0)$ – начальное состояние ij -резистора).

Разнообразие формируемых за один шаг матриц проводимости невелико. Это связано с относительно небольшим числом управляющих параметров: $m-1$ разностей потенциалов для управления $m(m-1)/2$ резисторами. Можно было бы попытаться сформировать матрицу проводимостей за несколько шагов, однако на каждом шаге формирования частично стирается информация, записанная на предыдущих шагах. Для последовательного формирования матрицы проводимости идеально было бы иметь матрицу q , у которой два симметричных элемента равны единице, а остальные элементы равны нулю. При этом происходит запись только для одного резистора, остальные резисторы не меняют своих состояний. Однако в силу определений (32), (33) такая матрица невозможна. Число независимых ненулевых элементов существенно больше единицы (при большом числе проводников m).

Рассмотрим пример. Пусть $K=2$. В этом случае имеется только одна разность потенциалов, так что $\phi_i=\phi$, если $i \in M_1$, и $\phi_i=0$, если $i \in M_2$. Считая, что $\phi>0$ (в противном случае нужно изменить нумерацию подмножеств), получаем: $p_{ij}=1$, если $i \in M_1, j \in M_2$; $p_{ij}=-1$, если $i \in M_2, j \in M_1$; $p_{ij}=0$, если $i \in M_1, j \in M_1$ или $i \in M_2, j \in M_2$. Матрица p имеет m^2 элементов (из них только $m(m-1)/2$ независимых). Среди них m_1m_2 элементов равны 1, m_1m_2 элементов равны -1, а остальные $m_1^2 + m_2^2$ элементов нулевые. Для полной резисторной матрицы число ненулевых элементов матрицы q

совпадает с числом ненулевых элементов матрицы p , т.е. равно $2m_1m_2$. При $m_1=m_2=m/2$ половина элементов матриц p, q ненулевые. При $m_1=1$ или $m_2=1$ число ненулевых элементов равно $2(m-1)$. Это число хотя и меньше, но всё равно велико (при больших m). Добиться высокой степени локализации при формировании матрицы проводимостей не получится. Заметим, что при $K>2$ степень локализации ещё меньше.

Для матрицы q число элементов, равных 1, не обязано быть равным числу элементов -1. В частности, если $p_{ij}=s_{ij}$ для ненулевых элементов, то все ненулевые элементы матрицы q равны 1. Если $p_{ij}=-s_{ij}$ для ненулевых элементов, то все ненулевые элементы матрицы q равны -1. Если матрицы p и s не коррелируют (т.е. направления резисторов можно считать случайными), число положительных элементов в матрице q приблизительно равно числу отрицательных элементов.

Рассмотренное упрощённое описание формирования матрицы проводимостей может показаться слишком грубым. По существу, при таком описании все возможные разности потенциалов разбиваются на три класса: малые, большие положительные и большие отрицательные. Остаётся надежда, что более детальное описание позволит сделать формирование матрицы проводимости более локализованным. Рассмотрим случай $K=3, m_1=1, m_2=1, M_1=\{k\}, M_2=\{l\}$. При специальном выборе начала отсчёта потенциалов имеем: $\phi_k=\phi^{(1)}, \phi_l=\phi^{(2)}, \phi_i=0, i \neq k, l$. Для напряжений на резисторах получаем выражения

$$\begin{aligned} u_{kl} &= -u_{lk} = \phi^{(1)} - \phi^{(2)}, \\ u_{ki} &= -u_{ik} = \phi^{(1)}, i \neq k, l, \\ u_{li} &= -u_{il} = \phi^{(2)}, i \neq k, l, \\ u_{ij} &= 0, i, j \neq k, l. \end{aligned} \quad (35)$$

В наиболее интересном случае, когда $\phi^{(1)}>0$, а $\phi^{(2)}<0$, получаем матрицу p с элементами

$$\begin{aligned} p_{kl} &= -p_{lk} = 1, \\ p_{ki} &= -p_{ik} = 1, i \neq k, l, \\ p_{li} &= -p_{il} = -1, i \neq k, l, \\ p_{ij} &= 0, i, j \neq k, l. \end{aligned}$$

С точки зрения упрощённого описания (т.е. матрицы q) kl -резистор и ki -резисторы с $s_{kl}=s_{ki}$ подвергаются одинаковому воздействию. Однако напряжения на них разные – при $\phi^{(1)}=-\phi^{(2)}$ получаем $u_{kl}=2u_{ki}$. Если зависимость стационарного состояния от напряжения $x_{st}(u)$ сильно нелинейная (например, $x_{st} \sim u^\nu, \nu>1$), состояния $x_{st}(u_{kl})$ и $x_{st}(u_{ki})$ могут значительно различаться. При определённых условиях (правда, довольно экзотических) можно так подобрать напряжения, чтобы $x_{st}(u_{kl}) \approx 1$, а $x_{st}(u_{ki}) \approx 0$. Можно было бы так переопределить матрицу p , чтобы $p_{ij}=1$, если u_{ij} превышает определённый порог. Возникает иллюзия, что можно добиться локализации при

формировании матрицы проводимостей, т.е. менять состояние отдельного резистора, не затрагивая остальные. Однако приведённые рассуждения, даже если они применимы к реальным резисторам, относятся только к положительным напряжениям ($q_{ij}=1$). Резисторы с $q_{ij}=-1$ неизбежно подвергаются стиранию. Чтобы достичь локализации воздействия, надо придумывать неестественные предположения относительно процесса стирания.

Заметим, что при использовании небольших напряжений может возникнуть дополнительное усложнение из-за попадания в область бистабильности. При этом стационарное состояние резисторной матрицы зависит от начальных условий. Можно было бы попытаться использовать подобную неоднозначность для обработки информации. Однако для этого нужно точно знать и контролировать характеристики переменных резисторов. Пока это нерешённая проблема.

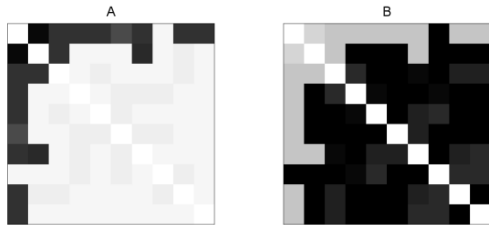


Рис. 5. Формируемые матрицы проводимостей при $x_{ij}(0) \approx 0$, $\phi^{(1)} > 0$ (А) и $x_{ij}(0) \approx 1$, $\phi^{(1)} < 0$ (В)

Если оставаться в рамках типичных характеристик переменных резисторов и использовать надёжные варианты режима прямого подключения, осуществить локальное воздействие при формировании решетки не удастся. На рис. 5 изображены сформированные под действием напряжений (35) матрицы проводимостей для полной резисторной матрицы и случайной сигнатурной матрицы при $m=10$, $k=1$, $l=2$, $\phi^{(1)}=-\phi^{(2)}$, $s_{12}=1$. Первая матрица получена при нулевых начальных условиях ($x_{ij}(0) \approx 0$) и $\phi^{(1)} > 0$, а вторая матрица получена при единичных начальных условиях ($x_{ij}(0) \approx 1$) и $\phi^{(1)} < 0$. Резисторы, не подвергающиеся воздействию ($q_{ij}=0$), сохраняют своё начальное состояние. Чёрный и белый цвета соответствует $x=1$ и $x=0$. Хотя целью является (1,2)-резистор, существенному воздействию подвергаются и другие (нецелевые) резисторы.

Несколько упрощая, можно сказать, что в режиме прямого подключения формируемые матрицы проводимости определяются матрицами q , которые получаются в результате поэлементного умножения сигнатурной матрицы s и матрицы сигнатуры напряжений p . Чтобы расширить

множество формируемых матриц проводимости, необходимо использовать другие режимы подключения резисторной матрицы к источникам напряжения.

Обратимся к режиму двухполюсника.

5.2. Режим двухполюсника

Итак, пусть два проводника подключены к источникам напряжения, а остальные проводники изолированы:

$$g_k, g_l \neq 0, \quad g_i = 0, i \neq k, l. \quad (36)$$

Два последовательных постоянных резистора с сопротивлениями $r_k=1/g_k$ и $r_l=1/g_l$ можно заменить одним резистором с сопротивлением $r=r_k+r_l$. Этот резистор ограничивает ток между k - и l -источниками. Обозначим напряжение между этими источниками u ($u=\phi_k-\phi_l$). Будем считать, что $u>0$ (при $u<0$ нужно изменить нумерацию источников). Ток, протекающий от k -источника к l -источнику равен

$$I = \frac{u}{r+R}, \quad (37)$$

где R – сопротивление резисторной матрицы как двухполюсника. Оно зависит от состояний всех переменных резисторов матрицы. Сопротивление r выбирается между максимальным и минимальным значениями сопротивления R : $R_{min} < r < R_{max}$. Если $R_{min} \ll R_{max}$, что в дальнейшем предполагается, должны выполняться сильные неравенства

$$R_{min} \ll r \ll R_{max}. \quad (38)$$

При высоком сопротивлении двухполюсника ($R \gg r$) почти всё напряжение u падает на нём – постоянный резистор не играет роли, двухполюсник находится под заданным напряжением. При низком сопротивлении двухполюсника ($R \ll r$) большая часть напряжения падает на постоянном резисторе, через двухполюсник течёт заданный ток $I \approx I_{max} = u/r$. В любом случае ток ограничен сверху величиной I_{max} .

Ток внутри двухполюсника протекает по различным путям. Путь, проходящий последовательно через проводники с номерами $i_1, \dots, i_{n-1}$, обозначаем

$$k \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{n-1} \rightarrow l. \quad (39)$$

Путь (39) имеет в своём составе $n+1$ проводников и проходит через n резисторов. Число резисторов называем длиной пути, так что длина пути (39) равна n .

Очевидно, есть смысл рассматривать только пути без самопересечений, для которых все номера проводников различны. Такие пути имеют длину не больше $m-1$. Обозначим $N(n)$ число путей длины n (без самопересечений). Для полной резисторной матрицы

$$N(n) = \frac{(m-2)!}{(m-1-n)!}, \quad (39)$$

причём по определению $0!=1$.

Если резисторная матрица разреженная и вероятность наличия резистора между данными проводниками равна P , вместо (39) получаем оценку для ожидаемого числа

$$N(n) \approx P^n \frac{(m-2)!}{(m-1-n)!}. \quad (40)$$

Если путь содержит хотя бы один резистор с высоким сопротивлением, ток по этому пути не течёт при условии, что имеется другой путь с низким сопротивлением. Для стационарных состояний низкое сопротивление резистора получается, только если направление тока совпадает с направлением резистора и величина тока достаточна для перехода в высокопроводящее состояние. Таким образом, достаточно рассматривать только такие пути, все резисторы которых проходятся в прямом направлении – пути, согласованные с сигнатурой (короче s -согласованные пути). Любой из этих путей или несколько таких путей могут стать каналами протекания тока. Такие каналы формируются, когда все резисторы пути оказываются в высокопроводящем состоянии.

Для полной резисторной матрицы со случайной сигнатурной матрицей, независимые элементы которой с равной вероятностью равны 1 или -1, можно получить следующую оценку ожидаемого числа s -согласованных путей длины n ($1 \leq n \leq m-1$)

$$N^+(n) = \frac{(m-2)!}{2^n (m-1-n)!}. \quad (41)$$

Как видим, при большом размере резисторной матрицы имеется очень много s -согласованных путей, причём большинство путей имеет значительную длину (порядка m). Учесть все возможные каналы затруднительно. К счастью, обычно в этом нет необходимости. При близких проводимостях резисторов преимущество имеют самые короткие пути – они имеют наименьшее сопротивление. По ним течёт наибольший ток, и проводимости коротких путей растут наиболее быстро, что даёт им ещё большее преимущество.

Правда, это справедливо только при сходных начальных условиях для резисторов. Если уже имеется канал (каналы) протекания тока (пусть даже и длинный), по нему протекает основной ток, при этом короткие каналы могут не сформироваться (рис. 6).

При высоком контрасте резисторов ($\Delta G/G_0 \gg 1$) любой s -согласованный путь может быть высокопроводящим каналом в стационарном состоянии. Само стационарное состояние можно характеризовать набором высокопроводящих каналов. Число таких каналов зависит от доступного тока I_{max} и характеристических функций резисторов.

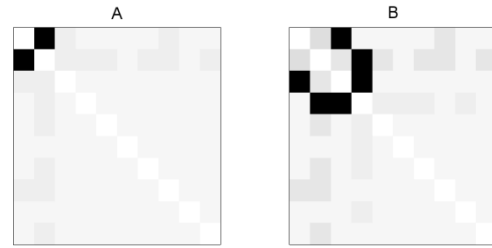


Рис. 6. Формирование короткого канала при равномерных начальных условиях (А) и длинного канала при специальных начальных условиях (В)

Если характеристические функции обеспечивают достижение значительных различий проводимостей резисторов, небольшое количество высокопроводящих каналов препятствует образованию других каналов (рис. 7А). В противном случае может формировать много каналов (рис. 7В). При этом доступный ток I_{max} должен быть достаточен для поддержания высокопроводящих каналов. В противном случае высокопроводящие каналы вообще не формируются. Двухполюсник имеет значительное сопротивление.

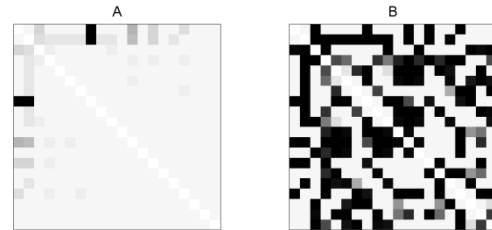


Рис. 7. Формирование одного канала (А) и большого числа каналов (В) при разных характеристических функциях

Даже при малом числе высокопроводящих каналов (1...2) число стационарных состояний велико при большом m . При неизвестных начальных условиях результат приложения напряжения к полюсам двухполюсника совершенно непредсказуем. На рис. 8 представлены две матрицы проводимости, полученные при одинаковом напряжении, но при разных начальных условиях – различие очевидно. Возникает желание уменьшить число потенциальных каналов, чтобы снизить неоднозначность результата формирования матрицы проводимости.

Для этого можно попробовать использовать разреженную матрицу резисторов. Вместо оценки (41) для разреженной матрицы получаем оценку

$$N^+(n) \approx \left(\frac{P}{2}\right)^n \frac{(m-2)!}{(m-1-n)!}. \quad (42)$$

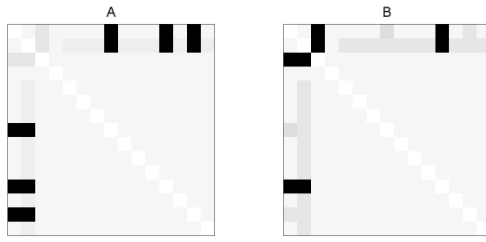


Рис. 8. В зависимости от начальных условий формируются разные наборы каналов (3 канала для случая А и 2 канала для случая В)

Учитывая рекуррентную формулу

$$N^+(n) = N^+(n-1)(m-n)P/2, \quad (43)$$

получаем, что с ростом n величина $N^+(n)$ сначала растёт, достигает максимума при

$$n = n_m \cong m - 2/P \quad (44)$$

(при вычислении n_m производится округление до целого числа), а затем уменьшается. Конечно, должно быть $n_m > 2$, в противном случае $N^+(n) < 1$ для всех допустимых n . Для максимального значения $N^+(n)$ с помощью формулы Стирлинга получаем оценку

$$N^+(n_m) \approx C \frac{\exp\{m(\mu - \ln \mu - 1)\}}{m}, \quad (45)$$

где $\mu = (m - n_m)/m$, C – множитель порядка единицы. Если для ограничения числа s -согласованных путей потребовать $N^+(n_m) \sim 1$, получим уравнение для определения μ

$$\mu - \ln(\mu) - 1 = B \ln(m)/m, \quad (46)$$

где B – число порядка единицы. Уравнение (46) имеет единственное решение. При больших m корень близок к 1. Здесь легко получить

$$\mu = 1 - \left(\frac{2B \ln(m)}{m}\right)^{1/2}, \quad n_m = (2B \ln(m)m)^{1/2},$$

$$P = \frac{2}{m - n_m} \approx \frac{2}{m}. \quad (47)$$

Типичная длина пути здесь мала по сравнению с m , но значительно больше 1. Короткие s -согласованные пути крайне редки, как и очень длинные пути (с длиной порядка m). Требуемое прореживание весьма значительное – каждый проводник контактирует в среднем с двумя другими проводниками. Число согласованных путей очень сильно зависит от степени прореживания – малые изменения вероятности P приводят к существенному изменению числа путей. Очевидно, случайное прореживание нельзя рассматривать как полезный метод получения небольшого числа s -согласованных путей.

Более перспективным представляется использование резисторных матриц с упорядоченными сигнатурами. Рассмотрим упорядоченную сигнатурную матрицу с элементами

$$s_{ij} = 1, \quad i > j. \quad (48)$$

Такая сигнатурная матрица получается, когда проводники изготавливаются последовательно и порядок нанесения проводников определяет

направление резистора между ними.

Для числа путей от k -проводника к l -проводнику по-прежнему справедлива формула (39). Однако число s -согласованных путей существенно отличается от (41). А именно

$$N^+(n) = 0, \quad \text{if } n > k - l,$$

$$N^+(n) = \frac{(k-l-1)!}{(n-1)!(k-l-n)!}, \quad \text{если } n \leq k - l.$$

(49)

Из-за того, что номера проводников s -согласованного пути должны образовывать убывающую последовательность, число таких путей сильно ограничено. Так, при $n = k - l$ имеется всего один s -согласованный путь длины n . Пути с длиной больше $k - l$ вообще не могут быть s -согласованными. При $k = l + 1$ возможен единственный высокопроводящий канал, его длина равна 1. Для самого обильного на s -согласованные пути случая, когда $k = m$, $l = 1$, получаем согласно (49)

$$N^+(n) = \frac{(m-2)!}{(n-1)!(m-1-n)!} \quad (n \leq m-1). \quad (50)$$

Сравнение формулы (50) с формулой (41) для случайной полной сигнатурной матрицы показывает, что упорядоченная матрица даёт несколько больше s -согласованных путей только для малых n . По мере увеличения n преобладание случайной матрицы над упорядоченной матрицей растёт.

Переход от случайной сигнатурной матрицы к упорядоченной матрице сильно сокращает число возможных высокопроводящих каналов, а, следовательно, и число стационарных состояний. Существенно, что это число критически зависит от выбора положительного и отрицательного полюсов. Так, при $k = l + 1$ имеем всего один канал (длины 1) и единственное стационарное состояние.

Возможны и частично упорядоченные сигнатурные матрицы, для которых упорядочение не столь радикальное, как в (48). Общим правилом является сокращение общего числа возможных высокопроводящих каналов при увеличении степени упорядоченности, по крайней мере, для полных и слабо разреженных матриц. Заметим, что обратная тенденция возможна для сильно разреженных сигнатурных матриц специального вида. Например, если между полюсами имеется единственный путь и направления резисторов выбраны так, чтобы этот путь был s -согласованным, любое (в том числе случайное) изменение направлений резисторов пути сделает этот путь непригодным для формирования высокопроводящего канала.

При использовании упорядоченных сигнатурных матриц дополнительного сокращения числа s -согласованных путей можно добиться путем прореживания резисторной матрицы. Это прореживание может быть целенаправленным и

весьма умеренным. Например, если в полной резисторной матрице с сигнатурой (48) убрать всего один $(i+1, i)$ -резистор ($s_{i,i+1} \rightarrow 0$), то при $k \geq i \geq l$ не останется s -согласованных путей длины $k-l$, а число s -согласованных путей длины $k-l-1$ сократится до 1.

6. Заключение

Матрица переменных резисторов, несмотря на простоту составляющих её элементов, оказывается трудноуправляемой конструкцией и требует развития специальных методов для работы с ней. С помощью резисторной матрицы можно осуществить вектор-матричное умножение и при определённом режиме считать всю записанную в ней информацию, т.е. измерить проводимости её резисторов. Трудности возникают при формировании матрицы проводимостей. Причина трудностей – в малом числе управляющих сигналов (по сравнению с числом резисторов), и в сильной связи резисторов матрицы. Из-за отсутствия независимого доступа к каждому резистору матрицы невозможно сформировать произвольную матрицу проводимостей. Целью является получение как можно более широкого множества (многообразия) матриц.

Трудно придумать более удобный способ генерации матриц проводимости, чем приближение к стационарному состоянию при подключении резисторной матрицы к источникам постоянного напряжения. Именно такой способ рассмотрен в данной работе. Даже при таком подходе возникают трудности, связанные с наличием нескольких стационарных состояний при заданном распределении потенциалов источников. При нескольких стационарных состояниях результат формирования матрицы проводимостей зависит от начальных условий, при неизвестных начальных условиях можно говорить о неоднозначности результата. Есть два источника появления множественности стационарных состояний. Во-первых, даже отдельный резистор может проявлять бистабильность в некотором диапазоне напряжений. Во-вторых, в резисторной матрице имеется много путей протекания тока, распределение токов зависит от текущих проводимостей резисторов, изменение которых в свою очередь зависит от протекающих через них токов.

Бистабильность характерна для переменных резисторов с большим относительным изменением проводимости (высоким контрастом). Её можно подавить при использовании последовательно соединённого постоянного резистора. Можно обойти бистабильность, если позаботиться о том, чтобы напряжения на резисторах не попадали в диапазон бистабильности.

Неоднозначность второго типа не возникает,

если использовать режим прямого подключения резисторной матрицы, при котором проводники напрямую подключаются к источникам напряжения (или с помощью резисторов с очень малыми сопротивлениями). В этом режиме состояние каждого резистора меняется независимо от состояний других резисторов матрицы под действием известного напряжения. Результат процедуры формирования хорошо предсказуем и грубо определяется симметричной матрицей q , которая равна поэлементному произведению сигнатурной матрицы s и матрицы сигнатур напряжений p . Последнюю матрицу можно рассматривать как результат контрастирования матрицы напряжений $[u_{ij}]$. Число независимых элементов антисимметричной матрицы размера $m \times m$ (такой как матрица напряжений) равно $m(m-1)/2$. При больших m это число значительно больше числа напряжений источников $m-1$. Как следствие получаем ограничение многообразия формируемых матриц. В частности, затруднительно или невозможно получить состояния резисторной матрицы с малым числом резисторов в высокопроводящем состоянии. Плохо помогает многоэтапная процедура формирования матрицы проводимости – из-за плохой локализации воздействия (много элементов матрицы q отличны от нуля) на каждом шаге происходит частичное стирание информации, записанной на предыдущих шагах.

Для формирования некоторых матриц с малым числом резисторов в высокопроводящем состоянии больше подойдёт режим двухполюсника, при котором два проводника подключаются к источнику напряжения, а остальные проводники изолированы. Для такого режима типично наличие нескольких (или многих) стационарных состояний. Стационарное состояние характеризуется совокупностью высокопроводящих каналов – путей протекания значительного тока от положительного полюса к отрицательному. Число каналов зависит от напряжения источника. Пути, образующие каналы в стационарном состоянии, должны быть согласованы с сигнатурой резисторной матрицы (s -согласованы) – направление тока каждого резистора пути совпадает с направлением резистора. При наличии нескольких s -согласованных путей имеется много стационарных состояний. К какому именно стационарному состоянию стремится резисторная матрица, зависит от начальных условий. При одинаковых начальных условиях для разных резисторов преимущество имеют самые короткие пути. Они имеют наименьшие начальные сопротивления, и их проводимость увеличивается быстрее.

Состояние с приблизительно одинаковыми сопротивлениями резисторов характерно для

«сырой» резисторной матрицы, не несущей никакой информации. Если же резисторная матрица уже подвергалась процедурам формирования матрицы проводимости (с разными полюсами), сформированные ранее каналы проводимости могут стать решающим фактором, влияющим на выбор стационарного состояния. При большом числе s -согласованных путей отслеживать образующиеся каналы проводимости затруднительно, поэтому многоэтапное формирование матрицы проводимостей проблематично. Чтобы сделать процесс формирования матрицы проводимостей прозрачным, надо существенно сократить число s -согласованных путей. Это достигается при использовании упорядоченных сигнатурных матриц и целенаправленным прореживанием резисторной матрицы в сочетании с правильным выбором полюсов двухполюсника.

Рассмотренные упрощенные описания (на основе матрицы q и с помощью проводящих каналов) подразумевают большие относительные изменения проводимостей резисторов и правильно подобранные напряжения источников. При уменьшении контраста проводимостей или наличии промежуточных разностей потенциалов на резисторах картина размывается – стационарные состояния теряют наглядность. Однако и здесь упрощенные описания сохраняют методическую ценность, поскольку дают идеальные состояния, из которых реальные стационарные состояния получаются путём однопараметрического преобразования размывания (например, при уменьшении контраста $\Delta G/G$). На практике точную подстройку матрицы проводимости

можно осуществить с помощью того или иного варианта метода проб и ошибок [7], например путём варьирования разности потенциалов источников и.

Зависимость сформированной матрицы проводимостей от начальных условий может быть полезной для описания отношений между объектами. Если объектам сопоставить проводники, то импеданс двухполюсника, полюса которого совпадают с данными проводниками, описывает отношение между соответствующими объектами. В бинарном случае низкое сопротивление соответствует наличию отношения. Отношения могут быть как прямые (при высокой проводимости резистора между проводниками), так и опосредованными. Наличие прямого отношения можно определить при измерении в режиме прямого подключения. Этим же режимом можно воспользоваться, чтобы сформировать прямое отношение. Система отношений между объектами формируется в результате эволюции под действием заданных напряжений источников (не обязательно постоянных). Эти напряжения могут зависеть от измеренных сопротивлений. Прикладная ценность такой системы неочевидна, однако её сложность [8], таящая возможности, не вызывает сомнений.

Публикация выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по проведению фундаментальных исследований (FNEF-2022-0003).

Stationary States of the Resistor Array

G. A. Beskhlebnova and V. B. Kotov

Abstract. The core of many neuromorphic systems is a vector-matrix multiplier. It can be realized using a resistor array. The most interesting are resistor arrays with variable resistors changing resistance under the action of current flows through them. The task of forming a matrix of resistor conductances, leading to multiplication by the desired matrix, arises. In general, due to the relatively small number of control signals (voltages) and the lack of access to a single resistor, this problem has no solution. It is reasonable to choose convenient methods of conductivity matrix formation and describe the sets of conductivity matrices formed by using each method or combination of methods. The simplest and most stable is the procedure of conductivity matrix formation, when constant voltages are applied to the input of the system and the system moves to a stationary state. Two modes of such a procedure are considered - the direct connection mode and the two-pole mode. Stationary states of the resistor array for these modes are studied and illustrative simplified descriptions of the result of the conductivity matrix formation in each mode are developed. Although the conditions of applicability of the simplified descriptions are not always fulfilled in practice, the corresponding "ideal" states can usually be used to classify real stationary states.

Keywords: resistor array, matrix-vector multiplication, variable resistor, signature matrix, conductivity matrix, stationary states

Литература

1. Adamatzky A., Chua L. Memristor Networks. Springer International Publishing, 201).
2. Kotov V.B., Beskhlebnova G.A. Data Representation in All-Resistor Systems. //Kryzhanovsky B., Dunin-Bar-kowski W., Redko V., Tiumentsev Y. (eds.). Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research IV. NEUROINFORMATICS 2020. Studies in Computational Intelligence. Vol. 925. Cham: Springer. 2021. P. 330-338.
3. Advances in Memristors, Memristive Devices and Systems. /Edited by S. Vaidyanathan and C. Volos. Springer International Publishing AG (2017).
4. Kotov V.B., Beskhlebnova G.A. Generation of the Conductivity Matrix. //B. Kryzhanovsky et al. (Eds.). Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research V (NEUROINFORMATICS 2021). Studies in Computational Intelligence. Vol. 1008. Cham: Springer. 2022. P. 276-284.
5. Kotov V.B., Yudkin F.A. Modeling and Characterization of Resistor Elements for Neuromorphic Systems. Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). 2019, v.28, No.4, P. 271-282.
6. Chua L.O. Memristor – the missing circuit element. IEEE Trans. Circuit Theory. 18, 507-519 (1971).
7. Sutton R.S., Barto A.G. Reinforcement Learning. MIT Press. Cambridge. MA. 1998.
8. O'Callaghan C., Rocha C. G., Niosi F., Manning H. G., Boland J. J., and Ferreira M. S.: Collective capacitive and memristive responses in random nanowire networks: Emergence of critical connectivity pathways. Journal of Applied Physics 124, 152118 (2018).