

О явном виде фундаментальных единиц больших степеней в гиперэллиптических полях рода 2 над полем рациональных чисел

М.М. Петрунин¹

¹ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва, Россия, petrunin@niisi.ras.ru

Аннотация. Ранее были получены и описаны многочлены $f \in \mathbb{Q}[x]$, для которых гиперэллиптическое поле $\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ содержит фундаментальные единицы больших степеней, что равносильно существованию $\mathbb{Q}$ -точек кручения больших порядков в якобианах соответствующих гиперэллиптических кривых. Для ряда задач, например, для классификации компонент комплексных кривых с парами сопряженных точек кручения требуется не только многочлен f , но и явный вид фундаментальной единицы соответствующего гиперэллиптического поля. В настоящей работе впервые приводится явный вид фундаментальных единиц для гиперэллиптических полей рода 2 с точками кручения в якобиане порядка 33, 36 и 48.

Ключевые слова: фундаментальные единицы, кручение, гиперэллиптические кривые, кривые рода 2, матричная линейаризация, якобиан гиперэллиптической кривой

1. Введение

Пусть $f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + \dots + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ - свободный от квадратов многочлен. Обозначим

$$D_f = \mathbb{Q}[x](\sqrt{f}) = \{\alpha + \beta\sqrt{f} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]\}$$

Элемент $u \in D_f$ называется единицей, если u обратим в D_f . Если единица $u \in \mathbb{Q}^*$, то u называется тривиальной единицей в D_f . Легко видеть, что $u = \alpha + \beta\sqrt{f}$ обратим в D_f тогда и только тогда, когда

$$N(u) = \alpha^2 - \beta^2 f \in \mathbb{Q}^*.$$

Для существования нетривиальной единицы необходимо, чтобы $a_6 = \gamma^2, \gamma \in \mathbb{Q}^*$. Предположим, что D_f обладает нетривиальными единицами. Тогда мультипликативная группа $D_f^* = \mathbb{Q}^* \times \langle u_1 \rangle$, где $\langle u_1 \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Элемент u_1 называется фундаментальной единицей в D_f .

Профессор Квентин Гендрон из Национального автономного университета Мексики написал письмо, где сообщил, что занимается классификацией компонент

комплексных кривых с парами сопряженных точек кручения. Для его исследования существенным является явный вид фундаментальной единицы. В работах [1] и [2] приведены многочлены $f_{33}, f_{36}, f_{48,1}$ и $f_{48,2}$, но соответствующие многочлены α_i, β_i , позволяющие построить фундаментальную единицу, приведены не полностью.

В настоящей работе мы приводим полные выражения α, β для многочленов f , задающих гиперэллиптические поля рода 2 с точками кручения в якобиане порядка 33, 36 и 48.

2. Явный вид фундаментальных единиц

Проблема существования нетривиальных единиц является трудной и имеет глубокие связи с кручением в якобиевых многообразиях кривых, задаваемых уравнением $y^2 = f(x)$, функциональными непрерывными дробями и ганкелевыми матрицами. Результаты, посвященные исследованию фундаментальных единиц, построению эффективных алгоритмов для их вычисления и применение этих результатов к проблеме кручения в якобианах гиперэллиптических кривых, задаваемых уравнением $y^2 = f(x)$, подробно изложены в фундаментальной работе [1]. Кратко напомним критерий метода матричной линейаризации, на котором базируются вычисления настоящей

статьи.

Поскольку $a_6 \neq 0$ — полный квадрат в $\mathbb{Q}$, бесконечное нормирование поля $\mathbb{Q}(x)$ имеет два продолжения на $\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$. В этом случае $\sqrt{f} \in \mathbb{Q}((x))$ и $\sqrt{f}$ разлагается в ряд Лорана

$$\sqrt{f} = x^s + d_{s-1}x^{s-1} + d_{s-2}x^{s-2} + \dots$$

Рассмотрим матрицу

$$H_r = \begin{pmatrix} d_{-1} & d_{-2} & \dots & d_{-r} \\ d_{-2} & d_{-3} & \dots & d_{-r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{-r-s+2} & d_{-r-s+1} & \dots & d_{-2r-s+3} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет r столбцов и $r+s-2$ строки. В соответствии с критерием из [?] гиперэллиптическое поле $\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ имеет нетривиальную единицу $u = \alpha + \beta\sqrt{f}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]$ и $\deg \beta = r$, тогда и только тогда, когда ранг матрицы H_{r+1} меньше, чем $r+1$.

Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{33} = & \frac{2097152}{421428992913}x^{33} + \frac{118489088}{421428992913}x^{32} + \frac{3106930688}{421428992913}x^{31} + \\ & + \frac{50114068480}{421428992913}x^{30} + \frac{555674632192}{421428992913}x^{29} + \frac{4484645060608}{421428992913}x^{28} + \frac{3024973987840}{46825443657}x^{27} + \\ & + \frac{42290834898944}{140476330971}x^{26} + \frac{17056384466944}{15608481219}x^{25} + \frac{146829151313920}{46825443657}x^{24} + \\ & + \frac{113542815440896}{15608481219}x^{23} + \frac{220749296816128}{15608481219}x^{22} + \frac{41689034828800}{1734275691}x^{21} + \\ & + \frac{189945023508992}{5202827073}x^{20} + \frac{28426110897152}{578091897}x^{19} + \frac{102525033008128}{1734275691}x^{18} + \\ & + \frac{12688970726624}{192697299}x^{17} + \frac{12828478840688}{192697299}x^{16} + \frac{1244690579984}{21410811}x^{15} + \\ & + \frac{3203919391432}{64232433}x^{14} + \frac{850789339238}{21410811}x^{13} + \frac{143452948633}{7136937}x^{12} + \frac{400151599060}{21410811}x^{11} + \\ & + \frac{222938635711}{21410811}x^{10} - \frac{12923476826}{2378979}x^9 + \frac{107081121878}{7136937}x^8 - \frac{10227603644}{792993}x^7 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{23827206919}{2378979}x^6 - \frac{4551069290}{792993}x^5 + \frac{2032061950}{792993}x^4 - \frac{234463488}{264331}x^3 +$$

$$+ \frac{57472367}{264331}x^2 - 36x + \frac{779871}{264331},$$

$$\beta_{33} = \frac{1048576}{421428992913}x^{30} + \frac{55574528}{421428992913}x^{29} + \frac{453509120}{140476330971}x^{28} +$$

$$+ \frac{20376977408}{421428992913}x^{27} + \frac{208470605824}{421428992913}x^{26} + \frac{57073008640}{15608481219}x^{25} +$$

$$+ \frac{2832015228928}{140476330971}x^{24} + \frac{1319655833600}{15608481219}x^{23} + \frac{4273004306432}{15608481219}x^{22} +$$

$$+ \frac{10877671399424}{15608481219}x^{21} + \frac{22450722500608}{15608481219}x^{20} + \frac{1458414952448}{578091897}x^{19} +$$

$$+ \frac{20408805829120}{5202827073}x^{18} + \frac{348519982592}{64232433}x^{17} + \frac{1270722771968}{192697299}x^{16} +$$

$$+ \frac{1405226318848}{192697299}x^{15} + \frac{1449118432112}{192697299}x^{14} + \frac{47613823760}{7136937}x^{13} +$$

$$+ \frac{345979037144}{64232433}x^{12} + \frac{98263757552}{21410811}x^{11} + \frac{18267103357}{7136937}x^{10} +$$

$$+ \frac{33867376277}{21410811}x^9 + \frac{36032793205}{21410811}x^8 - \frac{450761894}{792993}x^7 + \frac{8517708721}{7136937}x^6 -$$

$$+\frac{495770215}{792993}x^5+\frac{317855981}{792993}x^4-\frac{116671510}{792993}x^3+\frac{37192531}{792993}x^2-$$

$$-\frac{2326491}{264331}x+1,$$

$$f_{33}=4x^6+28x^5+37x^4-30x^3+87x^2-54x+9;$$

$$\alpha_{36}=\frac{2187}{29120}x^{18}-\frac{6561}{29120}x^{16}+\frac{19683}{14560}x^{15}-\frac{2187}{14560}x^{14}-\frac{2187}{910}x^{13}+$$

$$+\frac{144099}{14560}x^{12}-\frac{34263}{7280}x^{11}-\frac{11421}{2240}x^{10}+\frac{24543}{728}x^9-\frac{10287}{320}x^8+$$

$$\frac{355347}{14560}x^7+\frac{216729}{7280}x^6-\frac{200853}{3640}x^5+\frac{157167}{1820}x^4-\frac{4491}{70}x^3+\frac{22527}{455}x^2-$$

$$-18x+\frac{32776}{4095},$$

$$\beta_{36}=\frac{729}{29120}x^{15}-\frac{729}{29120}x^{14}-\frac{243}{7280}x^{13}+\frac{729}{1820}x^{12}-\frac{6561}{14560}x^{11}++\frac{81}{14560}x^{10}$$

$$+\frac{14877}{7280},x^9-\frac{21843}{7280}x^8+\frac{79713}{29120}x^7+\frac{54783}{29120}x^6--\frac{10431}{1820}x^5+\frac{9903}{1040}x^4-$$

$$\frac{14787}{1820}x^3+\frac{2253}{364}x^2-\frac{1138}{455}x+1,$$

$$f_{36}=(3x^3+6x^2+3x+4)(3x^2-6x+8)(x+2);$$

$$\alpha_{48,1}=\frac{1}{54}x^8-\frac{11}{27}x^6+\frac{17}{6}x^4-6x^2-1,$$

$$\beta_{48,1} = \frac{1}{54}x^5 - \frac{5}{18}x^3 + x,$$

$$f_{48,1} = (x^4 - 10x^2 - 3)(x+2)(x-2);$$

$$\alpha_{48,2} = -\frac{1}{7344}x^{12} - \frac{5}{2448}x^{11} - \frac{53}{2448}x^{10} - \frac{1055}{7344}x^9 - \frac{203}{272}x^8 - \frac{2245}{816}x^7 -$$

$$-\frac{59005}{7344}x^6 - \frac{38959}{2448}x^5 - \frac{29519}{1224}x^4 - \frac{563}{34}x^3 - \frac{512}{51}x^2 + 9x - \frac{6850}{459},$$

$$\beta_{48,2} = -\frac{1}{7344}x^9 - \frac{13}{7344}x^8 - \frac{61}{3672}x^7 - \frac{115}{1224}x^6 - \frac{1015}{2448}x^5 - \frac{2995}{2448}x^4 -$$

$$-\frac{1280}{459}x^3 - \frac{3325}{918}x^2 - \frac{1483}{459}x + 1,$$

$$f_{48,2} = (x^4 + 3x^3 + 21x^2 - 27x + 18)(x^2 + x + 2);$$

Теорема 1. Пусть $u_{33} = \alpha_{33} + \beta_{33}\sqrt{f_{33}}$,
 $u_{36} = \alpha_{36} + \beta_{36}\sqrt{f_{36}}$, $u_{48,1} = \alpha_{48,1} + \beta_{48,1}\sqrt{f_{48,1}}$,
 $u_{48,2} = \alpha_{48,2} + \beta_{48,2}\sqrt{f_{48,2}}$. Тогда $u_{33}, u_{36}, u_{48,1},$
 $u_{48,2}$ являются фундаментальными единицами
гиперэллиптических полей $\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f_{33}}),$
 $\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f_{36}}), \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f_{48,1}}), \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f_{48,2}})$ соот-
ветственно.

Доказательство проводится аналогично
доказательству соответствующих теорем в
работе [1]. Отметим, что оно требует
высокопроизводительных символьных
вычислений и существенно опирается на метод
матричной линеаризации.

3. Заключение

Работа выполнена в рамках государственного
задания по проведению фундаментальных
научных исследований по проекту № FNEF-
2022-0011.

Explicit Form of Fundamental Units of High Degrees in Hyperelliptic Fields of Genus 2 over the Field of Rational Numbers

M.M. Petrunin

Abstract. Earlier, polynomials $f \in \mathbb{Q}[x]$ were obtained and described, for which the hyperelliptic field $\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ contains fundamental units of high degrees. This is equivalent to the existence of $\mathbb{Q}$ -torsion points of high order in the Jacobians of the corresponding hyperelliptic curves. For a series of problems, such as the classification of components of complex curves with pairs of conjugate torsion points, not only the polynomial f is required, but also the explicit form of the fundamental unit of the corresponding hyperelliptic field. In this paper, the explicit form of fundamental units for hyperelliptic fields of genus 2 with torsion points in the Jacobian of order 33, 36, and 48 is presented for the first time.

Keywords: fundamental units, torsion, hyperelliptic curves, genus 2 curves, matrix linearization, Jacobian of a hyperelliptic curve.

Литература

1. В.П. Платонов «Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел», Успехи математических наук – 2014, Т. 69:1, № 415, -С. 3-38.
2. В.П. Платонов, М.М. Петрунин «О проблеме кручения в якобианах кривых рода 2 над полем рациональных чисел», Доклады РАН, - 2012, Т. 446, № 3, С. 263-264.