Как автономный когнитивный агент может создавать аксиоматическую теорию

В.Г. Редько

ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва, Россия, vgredko@gmail.com

Аннотация. Может ли компьютерный автономный агент сам «изобрести» аксиоматический метод и применить его в определенной математической теории. В настоящей статье обсуждается этот вопрос. В качестве прототипа возможной аксиоматической теории используются «Начала» Евклида.

Ключевые слова: аксиомы, постулаты, теоремы, аксиоматическая теория

1. Введение

Один из ярких научных методов – аксиоматический подход. Основа этого подхода была заложена в «Началах» Евклида (примерно 300 год до н.э.) [1]. В «Началах» используются определения, постулаты и аксиомы, на основе которых дедуктивно доказываются многочисленные предложения, а именно, задачи (в которых нужно что-то построить) и теоремы (в которых нужно что-то доказать). Хотя сборник [1] содержит 6 книг, в целом «Начала» Евклида содержат 15 книг (подробнее см., например, [2]).

Необходимо отметить, что предпосылками создания «Начал» Евклида послужили работы академии Платона, в которой лицеисты решали многочисленные математические задачи, в основном геометрические. Эта академия была организована Платоном примерно в 387 г. до н. э. близ Афин. Платон подчеркивал важность решения математических задач для развития мышления членов академии. «Начала» Евклида излагаются как раз в духе работ членов академии Платона.

До появления «Начал» Евклида труды с таким же названием, суть которых заключалась в последовательном изложении ключевых фактов теоретической арифметики и геометрии, были составлены Гиппократом Хиосским (вторая половина V века до н. э.), а также платониками Леонтом и Февдием. Все они практически исчезли из обихода после появления работы Евклида. Об этом см., например, [2].

«Начала» Евклида долгое время служили образцом логического изложения математической теории. Например, структура «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона [3] прямо соответствовала структуре «Начал» Евклида. Таким образом, «Начала» Евклида [1] послужили мощным образцом аксиоматической теории.

Может ли компьютерный автономный агент сам «изобрести» аксиоматический метод и применить его в определенной математической теории. В настоящей статье обсуждается этот вопрос. В качестве прототипа возможной аксиоматической теории будем использовать «Начала» Евклида. Анализ начнем с модели агента-лицеиста в академии Платона.

2. Пример агента-лицеиста в академии Платона

Иллюстративная модель учёбы агента-лицеиста в академии Платона была построена в работе [4]. Воспроизведем основные результаты этой работы. Была построена простая компьютерная модель. Считалось, что агент в процессе учёбы накапливает математические знания, осваивает методы решения задач. При удачном решении задач у агента формируется уверенность в своих математических способностях, при этом возрастает и вероятность решения следующих задач. Определялась зависимость вероятности решения задачи агентом $P(t)$ от времени t. Считалось, что при $t = 0$ агент-лицеист только что поступил в академию, так что $P(0)$ мало; время t дискретно, один такт времени соответствует попытке решения одной задачи агентом. Пример расчета зависимости $P(t)$ по модели работы [4] приведен на рис. 1.

Видно, что сначала агент-лицеист довольно длительное время обучается и решает задачи редко. Затем вероятность решения задачи растет и приближается к 1. Явно видны скачки роста $P(t)$ в моменты правильного решения задач.

Понятно, что для коллектива академии Платона был важен обмен информацией о методах решения задач и о полученных результатах. Причем были важны красивые, серьезные, нетривиальные результаты, например, такие, как теорема Пифагора. Поэтому были полезны обзоры этих результатов. И такие обзоры появлялись еще до «Начал» Евклида.

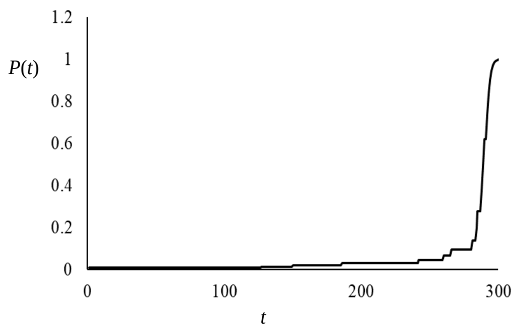

Рис. 1. Зависимость вероятности правильного решения задачи $P(t)$ агентом-лицеистом от времени t

Как же автономный агент может самостоятельно построить аксиоматическую теорию, аналогичную «Началам» Евклида? Для того чтобы попробовать ответить на этот вопрос, кратко охарактеризуем сами «Начала» Евклида.

3. Краткая характеристика содержания «Начал» Евклида

Остановимся на книге I, которая характеризует геометрические свойства плоских фигур [1]. Начинается книга с **определений** основных понятий; определений точки, линии, прямой линии, поверхности, плоской поверхности, угла, острого, тупого и прямого углов, круга, окружности, центра и диаметра круга, треугольника, равностороннего, равнобедренного и разностороннего треугольников, квадрата, параллелограмма, параллельных прямых.

За определениями следуют **постулаты**:

«1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.

2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

3. Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

4. Все прямые углы равны между собой.

5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.»

За постулатами следуют **аксиомы**, которые имеют характер общих утверждений, относящихся как геометрическим понятиям, так и к другим величинам:

«1. Равные одному и тому же равны и между собой.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.

5. И удвоенные одного и того же равны между собой.

6. И половины одного и того же равны между собой.

7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

8. И целое больше части.

9. И две прямые не содержат пространства.»

Детальнее об определениях, постулатах и аксиомах см. [1], в частности, комментарии переводчика в [1].

Отметим, что постулаты имеют характер аксиом.

Основываясь на определениях, постулатах и аксиомах, Евклид излагает и доказывает теоремы (часть из теорем являются построениями фигур). Приведём без доказательства первые пять теорем. Теоремы в [1] называются Предложениями.

Предложение 1. «На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.»

Под ограниченной прямой подразумевается отрезок определенной длины. При доказательстве этого предложения используются постулаты 1 и 3, а также аксиома 1.

Предложение 2. «От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.»

При доказательстве этого предложения используются постулат 3, аксиома 1 и предложение 1.

Предложение 3. «Из двух заданных неравных прямых от большей отнять прямую, равную меньшей.»

При доказательстве этого предложения используются постулат 3, аксиома 1 и предложение 2.

Предложение 4. «Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждая каждой, и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому.»

Это хорошо известное свойство равенства треугольников. При доказательстве этого предложения используется, аксиома 9.

Предложение 5. «У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и при продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.»

При доказательстве этого предложения используются постулат 2, аксиома 3 и предложения 3 и 4.

Из приведенных предложений видно, что предложения постепенно становятся сложнее и при доказательствах используются как постулаты и аксиомы, как и уже доказанные предложения.

Всего в книге I доказано 48 предложений. Заканчивается эта книга доказательством теоремы Пифагора.

4. «Основания геометрии» Гильберта

Отметим, что определенное развитие «Начал» Евклида сделал Д. Гильберт в книге «Основания геометрии» [5] (первое издание этой монографии вышло в 1899 году). Классические «Основания геометрии» Гильберта стали образцом для дальнейших работ по аксиоматическому построению геометрии. Гильберт реализовал её с исчерпывающей полнотой. Он не только дал полную аксиоматику геометрии, но также детально проанализировал эту аксиоматику, доказав независимость каждой из своих аксиом. Подчеркнём, что Гильберт построил новую систему аксиом, которые во многом близки к аксиомам Евклида, но явно от них отличаются.

5. Автоматизированные системы доказательства теорем

Как же может создавать подобную аксиоматическую теорию компьютерный автономный агент? Представим себе коллективного агента-лицеиста академии Платона. Имеется область – геометрия – в которой этот агент решает задачи. Технический метод решения задач известен: использовать только линейку и циркуль. Нужны и мысленные методы: постановка задач и использование доказательств при решении задач. Предположим, что наш агент освоил эти методы. Далее он решает различные задачи и составляет обзоры получаемых результатов. Особенно нетривиальным процессом является доказательство.

Кратко остановимся на методах создания компьютерных систем, способных самостоятельно производить доказательства. Такие системы были разработаны в 1950-годах А. Ньюэллом, Г.А. Саймоном и К. Шоу. Была разработана программа «Логик-теоретик» в рамках символической логики. Подробнее см. сайт [6], на котором представлен и отчёт А. Ньюэлла и Г.А. Саймона фирмы RAND Corporation, характеризующий суть программы и саму программу [7].

Основные особенности метода и программы «Логик-теоретик» состоят в следующем. Используется формализованная символическая логика. Имеются аксиомы, также формализованные в символической логике, хотя имеется и интерпретация этих аксиом. Имеются определения логических выражений. Используются элементарные выводы (например, методом аналогичным “modus ponens”), замены логических выражений их определениями. Доказываются теоремы в рамках формализованной символической логики. Используются списки уже доказанных теорем. Полезны списки нерешенных проблем. Для сокращения процессов развития аксиоматической теории используются определенные эвристики: рассматривается подобие символических выражений, подобие теорем. Рассматриваются процедуры обучения, при которых накапливается опыт.

Это была первая программа, специально разработанная для выполнения автоматических рассуждений. Логик-теоретик доказал некоторые теоремы в известных Principia Mathematica Б. Рассела и А.Н. Уайтхеда [8].

Таким образом, была разработана автоматизированная компьютерная информационная система, способная находить, используя эвристические методы, доказательства теорем в символической логике.

Дальнейшим развитием программы «Логик-теоретик» стала компьютерная программа «Универсальный решатель задач» или General Problem Solver (GPS), также разработанная А. Ньюэллом, Г.А. Саймоном и К. Шоу [9]. Эта программа была предназначена для работы в качестве универсальной машины для решения задач. В качестве примеров использования приводились доказательства теорем евклидовой геометрии и логики предикатов, решение шахматных задач.

Для GPS характерны следующие черты:

1) Рекурсивные процессы решения проблем
2) Отделение методов решения проблем от содержательной проблемы
3) Использование двух основных методов: а) анализ средств и целей, б) планирование
4) Память и программа организованы так, чтобы автоматизировать программу.

В этой программе активно используются эвристики. GPS работает над проблемами, сформулированными в виде объектов и операторов. Оператор преобразует одни объекты в другие. При доказательстве теорем объекты – теоремы, операторы – допустимые правила вывода. Программа – цепочка операторов.

Используются цепочки целей и подцелей. Ядро GPS состоит из некоторых общих, но достаточно мощных эвристик. Используется эвристика уменьшения подцелей. Формируется организованная система эвристик. Рассматривается сходство между объектами.

При планировании используется 1) абстрагирование от некоторых деталей объектов и операторов, 2) формирование соответствующей проблемы в абстрактном виде, 3) после решения абстрактной проблемы формирование плана оригинальной проблемы, 4) перевод плана в исходный вид и реализация его.

Имеются процедуры обучения, при которых накапливается и используется ранее полученный опыт.

Возможно разбиение большой проблемы на ряд малых. Также используется итеративный процесс с формированием новых планов.

Подробнее об универсальном решателе задач см. [9]. См. также книгу [10], развивающую работы по GPS.

Используя GPS, Г. Гелертер с коллегами разработали программы, прямо предназначенные для доказательства теорем евклидовой геометрии [11-13]. В этих программах вводятся специальные обозначения геометрических терминов, т.е. используется специальная символика. Используются специальные графы целей и подцелей, т.е. «деревья» зависимости результатов и подрезультатов. Важно, что в этих работах, так же, как и в GPS, процесс доказательств использовал ряд эвристик, т.е. в программах должна быть заложена способность самостоятельно осуществлять догадки эффективных путей доказательства. Был разработан удобный специальный язык обработки списков, компилируемый системой FORTRAN.

В работах [11-13] излагаются компьютерные доказательства нескольких геометрических теорем. В частности, в работе [12] была доказана первая теорема в «Началах» Евклида с помощью компьютерной программы, содержащей 20 000 отдельных компьютерных операторов.

Итак, в работах [11-13] были созданы компьютерные программы, осуществляющие доказательства геометрических теорем, в том числе теорем из «Начал» Евклида. Хотя в процесс доказательств включались эвристики и способность программы к самостоятельным догадкам. Сами программы были довольно сложными, что требует от автономного агента способности искусства создавать эффективные программы.

В дальнейшем появились системы по автоматическим доказательствам теорем, в которых геометрические понятия преобразуются в алгебраические равенства и неравенства. См. например, обзоры таких работ [14, 15]. То есть работы по автоматизированным доказательствам теорем активно развивались и продолжают развиваться.

В настоящее время имеется журнал “Journal of Automated Reasoning” [16], который включает тематику по развитию и применению систем автоматического доказательства теорем (automatic theorem provers).

О таких компьютерных системах см. также информацию Л.Д. Беклемишева, представленную на сайте ПостНауки [17].

6. Коллективный агент-лицеист. Шаги к аксиоматической теории

Вернёмся к коллективному агенту-лицеисту и рассмотрим, как он сможет пополнять и структурировать составленный им обзор полученных результатов, чтобы в конечном итоге получилась аксиоматическая теория, подобная «Началам» Евклида. Считаем, что обзор результатов содержит решения различных задач, а именно, задач на построение определенных фигур и доказательства теорем. Теперь рассмотрим, как коллективный агент-лицеист может преобразовать этот обзор в аксиоматическую теорию. Понятно, что теперь нужно добавить в обзор определения, т.е. охарактеризовать основные понятия, используемые при решении задач. Также необходимо добавить в обзор постулаты и аксиомы, для простоты постулаты дальше будем называть аксиомами. И самое нетривиальное, что нужно сделать, это надо упорядочить результаты обзора таким образом, чтобы полученные результаты последовательно выводились из аксиом и ранее изложенных результатов. При этом такое структурирование может потребовать введение новых понятий, аксиом и получение новых результатов, чтобы вся аксиоматическая теория представляла собой последовательно связанную цепочку элементов. По-видимому, такое структурирование будет происходить многократно, так как вполне возможно, что единая цепочка будет формироваться не сразу, а в результате многократных проверок и необходимых дополнений как определений, аксиом, так и теорем.

В начале обзора нужно поместить определения и аксиомы, стремясь к полноте изложения используемых понятий и к достаточно полной системе аксиом. Далее целесообразно излагать последовательно результаты, начиная с самых простых и наиболее общих. Простоту можно оценивать по числу используемых аксиом и по числу элементарных логических выводов, т.е. элементарных мысленных переходов вида «поскольку …, то…», «если…, то». Затем надо делать структурирование обзора, а именно, надо делать проверку получающейся системы на предмет того, что действительно каждый изложенный результат использует только систему аксиом и ранее изложенные результаты. Это структурирование осуществляется следующим образом.

Считаем, что общее число результатов, изложенных в обзоре, равно n. Вводятся номера результатов $k = 1,2,\dots,n$. Далее рассматриваем все результаты по порядку с номерами $k = 1, 2, \dots$ Остановимся на случае, когда рассматривается отдельный результат с номером k^*. Рассматриваются все использованные при получении данного результата k^* ссылки на другие результаты (аналогичные ссылкам на другие предложения в предложениях «Начал» Евклида, см. выше). Если все ссылки делаются на результаты с номерами, меньшими номера данного результата k^*, то для этого результата никакой перенумерации не происходит и рассматривается следующий результат с номером k^*+1. Если имеется хотя бы одна ссылка на результат с номером, большим, чем k^*, то происходит перенос данного результата в конец списка, т.е. результату присваивается номер $n+1$. После этого уменьшаются на 1 все номера результатов с номерами $k^*+1,\dots,n+1$. То есть теперь номер k^* имеет результат, следовавший ранее далее за данным результатом в обзоре. Перенесенный в конец списка данный результат имеет новый номер n. В соответствии с уменьшением номеров результатов уменьшаются и номера ссылок в перенумерованных результатах, т.е. в результатах, имеющих теперь номера $k^*,\dots,n$, а именно, рассматриваются ссылки на результаты с новыми номерами. Такая процедура структурирования проводится последовательно для всех результатов с номерами $k = 1,2,\dots,n$. После проведения структурирования для всех результатов каждый из результатов будет иметь ссылки только на результаты, предыдущие в обзоре, так же, как это имеет место в «Началах» Евклида.

Снова вернёмся к коллективному агенту-лицеисту. Он может получать новые результаты, и дополнять систему аксиом. Дополнение аксиом не будет приводить к существенным изменениям в обзоре. Если новые результаты не влияют на предыдущие, то их естественно вносить в конец списка результатов. Но если новые результаты влияют на предыдущие, то это приведёт к существенному изменению списка и к необходимости нового структурирования обзора по изложенному выше методу.

7. Заключение

В настоящей работе проанализированы вопросы, связанные с построением аксиоматических теорий в компьютерных программах. В качестве прототипа возможной аксиоматической теории рассматриваются «Начала» Евклида. Проанализированы методы создания компьютерных систем, способных самостоятельно производить доказательства: программы «Логик-теоретик» и «Универсальный решатель задач» разработанные А. Ньюэллом, Г.А. Саймоном и К. Шоу в 1950-х годах. Особое внимание уделено компьютерным системам (основанным на «Универсальном решателе задач»), разработанным Г. Гелертером с коллегами (конец 1950-х годов); эти системы прямо предназначены для доказательства теорем евклидовой геометрии. Анализ этих методов показывает сложность процессов формализации геометрических понятий, при формировании программ доказательств теорем. Тем не менее, такие методы могут быть использованы достаточно эффективным компьютерным автономным агентом при создании аксиоматических теорий и соответствующих компьютерных программ. Таким образом, в настоящей работе проведён анализ, показывающий, что возможно создание компьютерного автономного агента, самостоятельно формирующего аксиоматическую теорию.

Настоящая работа выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований по теме «Исследование нейроморфных систем обработки больших данных и технологии их изготовления», проект № FNEF-2022-0003.

How an Autonomous Cognitive Agent Can Create an Axiomatic Theory

Vladimir G. Red'ko

Abstract. Can a computer autonomous agent "invent" an axiomatic method by itself and apply it in a certain mathematical theory. This article discusses this issue. Euclid's "Elements" is used as a prototype for a possible axiomatic theory.

Keywords: axioms, postulates, theorems, axiomatic theory

Литература

1. Евклид. НАЧАЛА. Книги I–VI. (Пер. с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского). М.-Л., ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.
2. https://24smi.org/celebrity/4943-evklid.html
3. I. Newton. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. 1687. И. Ньютон. Математические начала натуральной философии. М., Наука, 1989.
4. В.Г. Редько. Как автономный компьютерный агент может самостоятельно открывать законы природы. «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте». Сборник научных трудов XI Международной научно-практической конференции (ИММВ-2022, Коломна, 16-19 мая 2022 г.). В 2-х томах. Т. 2. М., РАИИ, 2022, 108–118.
5. Д. Гильберт. Основания геометрии. М.-Л., ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.
6. https://wiki5.ru/wiki/Logic_Theorist
7. http://shelf1.library.cmu.edu/IMLS/MindModels/logictheorymachine.pdf
8. A.N. Whitehead, B. Russell. Principia Mathematica. Cambridge, Cambridge University. Press, 2nd edition. Vol. I (XLVI + 674 p.) 1925; Vol. II (XXXI + 742 p.) 1927; Vol. III (VIII + 491 p.) 1927.
9. A. Newell, J.C. Shaw, H.A. Simon. Report on a general problem-solving program. “Proceedings of the International Conference on Information Processing”. Paris, UNESCO, 15-20 June 1959. Published in 1960 by UNESCO (Paris), R. Oldenbourg (München) and Butterworths (London), 256–264. See also: http://bitsavers.informatik.uni-stuttgart.de/pdf/rand/ipl/P-1584_Report_On_A_General_Problem-Solving_Program_Feb59.pdf
10. A. Newell. Unified Theories of Cognition. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1990.
11. H. Gelernter, J. Hansen, D. Loveland. Empirical explorations of the geometry theorem proving machine. “Proceedings of the Western Joint Computer Conference”. 1960, Vol. 17, 143–147. Reprinted in “Computers and Thought”. E. Feigenbaum, J. Feldman (Eds.). New York, McGraw-Hill Book Co., 1963, 153–167. See also: https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/1460361.1460381
12. H. Gelernter. Realization of a geometry theorem proving machine. “Proceedings of the International Conference Information Processing”, Paris, June 15-20 1959, 273–282. Reprinted in “Computers and Thought”. E. Feigenbaum, J. Feldman (Eds.). New York, McGraw-Hill Book Co., 1963, 134–152.
13. H.L. Gelernter, N. Rochester. Intelligent behavior in problem-solving machines. “IBM Journal of Research and Development”, Vol. 2 (1958), No 4, 336–345.
14. A. Ferro, G. Gallo. Automated theorem proving in elementary geometry. “Le Matematiche”. Vol. 43 (1988), No 1,2, 195–224. See also: https://lematematiche.dmi.unict.it/index.php/lematematiche/article/view/713/678
15. D.W. Loveland. Automated Theorem Proving: A Logical Basis. “Fundamental Studies in Computer Science”. Vol. 6. Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publishing Company, 1978.
16. Сайт журнала “The Journal of Automated Reasoning”: https://www.springer.com/journal/10817
17. https://postnauka.ru/faq/26503