Ломаные фильтрации Арнольда, аналоги колец Стенли-Рейснера и симплициальные многогранники Ньютона

А.Г. Кушниренко[1]

[1]ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва, Россия, agk_@mail.ru

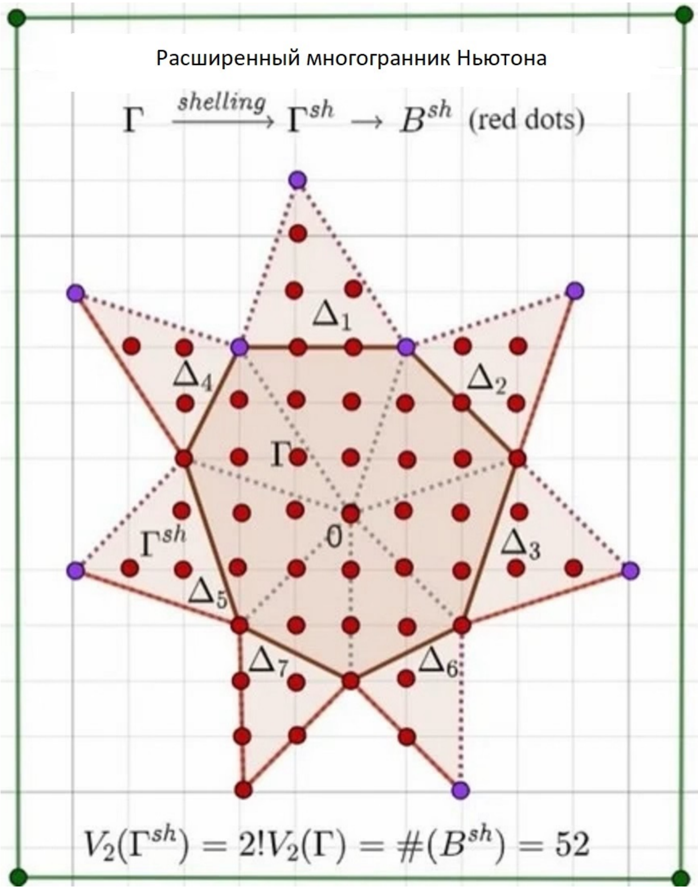
Аннотация. Оценивая число решений полиномиальных систем уравнений в терминах многогранников Ньютона, в 1974 году автор доказал, что коразмерность идеала $(g_1, g_2, \ldots, g_d)$, порожденного в групповой алгебре $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 многочленами Лорана общего положения, имеющими один и тот же многогранник Ньютона Γ, равна $d! \times Volume(\Gamma)$. Предположив, что многогранник Ньютона является *симплициальным* и *сверх-удобным* (то есть содержащим некоторую окрестность начала координат), автор передоказывает и усиливает результат 1974 года, явно указывая множество $\mathbb{B}^{sh}$ мономов , классы эквивалентности которых образуют базис фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$. Доказывается, что мощность этого множества равна $d! \times Volume(\Gamma)$. По известной теореме коммутативной алгебры из этого следует, что в случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$ характеристики 0, число решений системы уравнений $g_1 = g_2 = \ldots = g_d = 0$ с учетом кратностей будет равно $d! \times Volume(\Gamma)$.

Множество $\mathbb{B}^{sh}$ обладает аналогом свойства Дэна-Соммервилля и естественно возникает в процессе вычисления ряда Пуанкаре линейного пространства многочленов Лорана, снабженного "ломаной" градуировкой Арнольда-Ньютона. Индуктивное построение множества $\mathbb{B}^{sh}$ опирается на конструкцию шеллинга sh, существование которого для любого выпуклого многогранника доказали в 1971 году Брюгессер и Мани. Используя структуру $\mathbb{B}^{sh}$, мы доказываем, что ассоциированная градуированная $\mathbb{K}$-алгебра $gr^{\Gamma}(\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d])$, построенная по фильтрации Арнольда-Ньютона $\mathbb{K}$-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$, обладает свойством коэн-маколеевости. Наше доказательство коэн-маколеевости является обобщением доказательства Б. Кайнда и П. Клейншмитта 1979 года о коэн-маколеевости колец Стенли-Рейснера (Stanley–Reisner rings) симплициальных комплексов, допускающих шеллинг. Используя коэн-маколеевость $gr^{\Gamma}(\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d])$, мы доказываем, что для полиномов Лорана общего положения $(g_1, g_2, \ldots, g_d)$, имеющих один и тот же многогранник Ньютона Γ, множество $\mathbb{B}^{sh}$ является мономиальным базисом фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$.

Результаты статьи легко переносятся на обычные многочлены и формальные ряды, чему будет посвящена отдельная публикация.

Ключевые слова: многогранник Ньютона; шеллинг; кольца Коэна-Маколея; теорема Кушниренко; соотношения Дэна-Соммервиля, кольца Стенли-Рейснера.

Графическая аннотация. Ниже в двумерном случае показаны два основных объекта данной статьи: расширенный многогранник Ньютона Γ^{sh} и множество его целых точек B^{sh}.



1. Введение

1.1. Предыстория

В 1974 году В.И. Арнольд по многограннику Ньютона Γ ростка аналитической функции построил фильтрацию в кольцах многочленов и ростков аналитических функций от нескольких комплексных переменных [1]. Он назвал эту фильтрацию *ломаной* фильтрацией. Сегодня эту фильтрацию и аналогичные фильтрации в $\mathbb{K}$-алгебрах многочленов, многочленов Лорана и формальных рядов над полем $\mathbb{K}$ называют *фильтрациями Ньютона.* Изучение ассоциированных градуированных колец, построенных по фильтрации Ньютона-Арнольда в кольцах многочленов и формальных рядов проводилось автором в [2], [3], [4]. Центральным результатом изучения было установление свойства коэн-маколеевости этих градуированных колец. Это свойство удалось доказать гомологическими методами, используя полученный М. Хохстером в 1972 году нетривиальный результат о том, что полугрупповые $\mathbb{K}$-алгебры конических полугрупп в $\mathbb{Z}^d$ обладают свойством коэна-маколеевости. [5]. Мое доказательство коэн-маколеевости ассоциированного градуированного кольца было достаточно общим и сложным. В нем ассоциированное градуированное кольцо, возникающее по фильтрации Ньютона, рассматривалось, как результат склейки некоторых градуированных колец по комбинаторной схеме, определяемой полиэдральным комплексом граней многогранника Ньютона. Подобные схемы доказательства коэн- маколеевости сложных колец путем сведения к более простым кольцам позднее обсуждались в статье М. Хохстера [6]. В качестве более простых колец в моем доказательстве выступали полугрупповые кольца конических полугрупп в $\mathbb{Z}^d$. Их коэн-маколеевость является нетривиальным фактом, доказанным М. Хохстером в 1972 году. А коэн-маколеевость склейки таких колец по комбинаторной схеме, определяемой полиэдральным комплексом, доказывалась в моей статье 1976 года в предположении, что полиэдральный комплекс имеет гомологии сферы или диска и не использовало тот факт, что комплекс может быть реализован как граница выпуклого многогранника. Это позволяло применить мое доказательство 1975 года к симплициальным разбиениям гомологических сфер и доказать коэн-маколеевость колец Стенли-Рейснера таких симплициальных разбиений. Кроме того, мое доказательство коэн-маколеевости ассоциированного градуированного кольца, построенного по фильтрации Ньютона колец многочленов, многочленов Лорана и кольца ростков аналитических функций позволяло передоказать результат М. Хохстера о коэн-маколеевости полугрупповых колец конических полугрупп. Набросок доказательства теоремы М. Хохстера с помощью построения многогранников Ньютона для элементов полугрупповых колец конических полугрупп приведен в [4, section 5.12] и переизложен в [7].

1.2. Выполняя пожелание В.И. Арнольда 1975 года

Мое доказательство коэн-маколеевости ассоциированных градуированных колец было далеко от вопросов, которыми занимался семинар В. Арнольда на механико-математическом факультете Московского Государственного Университета в 70-годах прошлого века. Я использовал в доказательстве азы коммутативной алгебры и алгебраической геометрии, которым научился, прослушав около десятка докладов Ю.И. Манина на знаменитом семинаре И.М. Гельфанда на мехмате МГУ. И.М. Гельфанд был убежден, что знание этих азов будет полезно математикам самых разных специализаций и в моем случае прогноз оправдался. В.И. Арнольд, между тем, считал мое доказательство сложным и, в отличие от выведенных мною из него следствий, недостаточно наглядным. Наглядными следствиями, получившими высокую оценку В.И. Арнольда, были явные формулы, выражающие в терминах объемов многогранников Ньютона ряд топологических характеристик многочленов и ростков аналитических функций общего положения: кратность особой точки аналитической функции, эйлерову характеристику линии уровня многочлена и число решений полиномиальной системы d уравнений с d неизвестными в случае, когда все уравнения имеют один и тот же многогранник Ньютона. Простейший и известнейший из этих результатов - явная формула для числа решений полиномиальной системы уравнений общего положения с заданным многогранником Ньютона. По известной теореме коммутативной алгебры, в случае, когда поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, это число решений, с учетом кратностей, равно коразмерности идеала, порожденного в $\mathbb{K}$-алгебре многочленов Лорана $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$ уравнениями системы $g_1 = g_2 = \ldots = g_d = 0$. Для многочленов общего положения эта коразмерность конечна и равна числу элементов мономиального базиса фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$.

Важную информацию об этом идеале конечной коразмерности доставляют не только число элементов мономиального базиса фактор-алгебры, но и их расположение относительно многогранника Ньютона. Примеры вычисления мономиальных базисов для простейших нетривиальных многогранников Ньютона, приведенные в работе [9], вдохновили автора на продолжение, почти полвека спустя, исследований 1974 года для важного частного случая симплициальных многогранников Ньютона. Результаты этих исследований были в 2022 году опубликованы в моей статье [8] и переизлагаются на русском языке в данной статье. Оказалось, что в случае симплициального многогранника Ньютона мономиальный базис можно указать явно и доказать коэн-маколеевость $\mathbb{A}(\Gamma)$ конструктивными манипуляциями с мономами в духе техники "решения кроссвордов" В. Арнольда, [1, Пример 9.6.] и рассуждений статьи Б. Кайнда и П. Клейншмитта 1979 года о коэн-маколеевости колец Стенли-Рейснера симплициальных комплексов, допускающих шеллинг [10]. Результаты статьи [10] переизложенны в книге Р. Стенли [11]. Указав явно базис фактор-алгебры многочленов Лорана от d переменных по идеалу, порожденному d многочленами с заданным многогранником Ньютона мне, с многолетним запозданием, наконец-то удалось выполнить пожелание В. Арнольда по повышению наглядности алгебраического доказательства теоремы о числе решений системы полиномиальных уравнений с заданным многогранником Ньютона. Одновременное удалось улучшить и формулировку теоремы, построив по сверх-удобному многограннику Ньютона Γ и его шеллингу sh так называемое шеллинг-расширение Γ^{sh} многогранника Ньютона Γ, см. **графическую аннотацию** в начале статьи и раздел 2.5. ниже. Шеллинг-расширение является незамкнутым и, вообще говоря, невыпуклым многогранником. Полу-открытый многогранник Γ^{sh} составлен из непересекающихся полу-открытых параллелепипедов, объем каждого из которых равен числу содержащихся в нем целых точек. Поэтому мощность множества $\mathbb{B}^{sh} \in \Gamma^{sh}$ целых точек множества Γ^{sh} равна объему Γ^{sh}, который равен $d! \times Volume(\Gamma)$. Элементы множества $\mathbb{B}^{sh}$, в общем случае, и образуют мономиальный базис фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$. Замыкание шеллинг-расширения от выбора шеллинга не зависит, и является гомеоморфным диску многогранником, вообще говоря, невыпуклым, граница которого разбита на плоские $(d-1)$-мерные параллелепипеды. **Объему именно этого многогранника Γ^{sh} и равно ожидаемое число решений полиномиальной системы уравнений с данным многогранником Ньютона.**

1.3. Ассоциированные градуированные кольца фильтраций Арнольда-Ньютона и кольца граней Стенли-Рейснера

Идею нужных для доказательства коен-маколеевости манипуляций мне удалось найти в теории симплициальных комплексов. Если многогранник Γ является симплициальным, то ассоциированное градуированное кольцо $\mathbb{A}(\Gamma)$, построенное по определенной многогранником Γ фильтрации Ньютона-Арнольда в пространстве многочленов Лорана от нескольких переменных над полем $\mathbb{K}$, может рассматриваться как аналог так называемого *кольца граней* симплициального комплекса граней многогранника Γ. Кольца граней были введены в 1974 году Р. Стенли и Г. Рейснером [12] для изучения комбинаторных свойств симплициальных комплексов. Для комплекса граней сверх-удобного (имеющего начало координат внутренней точкой) симплициального многогранника Ньютона Γ, кольцо Стенли-Рейснера может быть отождествлено с подкольцом в построенном по фильтрации Ньютона ассоциированном градуированном кольце $\mathbb{A}(\Gamma)$, порожденном мономами, отвечающими вершинам Γ. В простейших случаях подкольцо Стенли-Рейснера может совпадать со всем кольцом $\mathbb{A}(\Gamma)$. Подобно тому, как кольца Стенли-Рейснера связаны с $\mathfrak{f}$-полиномами и $\mathfrak{h}$-полиномами симплициальных комплексов, кольца вида $\mathbb{A}(\Gamma)$ связаны с полиномами Эрхарта (Ehrhart polynomials) целочисленных выпуклых многогранников, но мы не будем затрагивать этот вопрос. Полезные для работы с ассоциированными градуированными кольцами манипуляции с мономами мне удалось подсмотреть в статье Б. Кайнда и П. Клейншмитта 1979 года о коэн-маколеевости колец Стенли-Рейснера симплициальных комплексов, допускающих шеллинг [10]. Рассуждения Б. Кайнда и П. Клейншмитта о симплициальных комплексах, допускающих шеллинг, удается применить для ассоциированных градуированных колец, порожденных симплициальными многогранниками Ньютона, поскольку Брюггерсер и Мани в 1971 году доказали, что комплекс граней любого выпуклого многогранника допускает шеллинг [13]. Результаты этой оригинальной работы переизложены во многих публикациях, например, в [14]. Определение шеллинга симплициального выпуклого многогранника будет приведено ниже в разделе 1.

1.4. Направления дальнейшей работы

1.4.1. Прямые обобщения результатов настоящей работы на случай обычных многочленов и формальных рядов

Базисы, аналогичные построенному в данной статье, с небольшими изменениями конструкции и доказательства, могут быть построены для обычных многочленов и формальных рядов. И в этом случае явное указание базиса более информативно, так как единичный моном в $\mathbb{K}$-алгебре многочленов или формальных рядов фиксирован самой постановкой задачи. Автор планирует проработать и опубликовать эти обобщения.

1.4.2. Аппроксимация несимплициального многогранника Ньютона симплициальными

Произвольный выпуклый многогранник с целочисленными вершинами в пространстве $\mathbb{R}^d$ можно аппроксимировать симплициальными многогранниками с рациональными вершинами. Этот факт позволяет свести вопрос о числе решений системы уравнений с произвольным многогранником Ньютона к вопросу о числе решений системы уравнений с симплициальным многогранником

Ньютона и тем самым применить результаты настоящей статьи для получения еще одного доказательства формулы для числа решений полиномиальной системы уравнений с заданным произвольным (не только симплициальным) многогранником Ньютона.

Автор планирует подготовить и опубликовать строгое обоснование этого рассуждения.

1.4.3. Явное построения базиса для системы общего положения с несимплициальным многогранником Ньютона

Зависящую от шеллинга конструкцию базиса можно обобщить на многогранник Ньютона Γ, не являющийся симплициальным, поскольку границу произвольного выпуклого многогранника можно разбить на симплексы так, что полученный симплициальный комплекс будет допускать шеллинг sh. Повторив конструкции настоящей статьи, стартующие с фиксированного шеллинга симплициального подразбиения Γ, мы получим незамкнутый многогранник Γ^{sh}, целые точки которого определяют некоторое множество мономов B мощности $d! \times Volume(\Gamma)$. Есть основания предполагать, что это множество для полиномов общего положения окажется базисом фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$. В пользу этой гипотезы говорит тот факт, что, как может быть проверено, распределение ньютоновских степеней этого множества совпадает с найденным в работе [4] распределением ньютоновских степеней мономов любого мономиального базиса в $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$. Эту гипотезу в простейших примерах реально было бы проверить с помощью систем компьютерной алгебры. Автор планирует в 2025 году провести подобную проверку для простейших трехмерных несимплициальных многогранников Ньютона.

1.4.4. Разработка для систем компьютерной алгебры модуля, генерирующего построенный в данной статье базис по шеллингу симплициального сверх-удобного многогранника

Автор не планирует заниматься этой задачей самостоятельно или вместе со своими студентами и сотрудниками.

1.4.5. Подготовка студенческих практикумов для ознакомления с системами выпуклой геометрии и коммутативной алгебры

Проверка основного результата данной статьи в двумерном и трехмерном случаях, ввиду наглядности геометрических и алгебраических объектов, фигурирующих в основной теореме, может лечь в основу студенческого практикума по знакомству с современными компьютерными системами выпуклой геометрии и коммутативной алгебры. Разработка подобных практикумов была начата в 2023 году в отделе учебной информатики ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН в рамках госзадания по теме фундаментальных исследований FNEF-2022-0010. Продолжение разработки предусматривается провести в 2025 году.

1.4.6. Интересная нерешенная задача явного построения мономиального базиса якобиева идеала типичного удобного формального ряда или многочлена от d переменных с заданным симплициальным многогранником Ньютона

В этом разделе мы придерживаемся обозначений работы [4] и обозначаем многогранник Ньютона формального ряда g от d переменных через $\Gamma_-(g)$. Для многочлена Лорана g с многогранником Ньютона Γ якобиев идеал J, порожденный обычными частными производными

$$J(g) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_d})$$

совпадает с идеалом J_{tor}, порожденным "подправленными" частными производными

$$J_{tor}(g) = (x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}, x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}, \ldots, x_d\frac{\partial g}{\partial x_d})$$

которые мы назовем "торическими" частными производными (любая торическая производная любого монома пропорциональна этому моному). Поэтому для многочлена Лорана общего положения коразмерности этих двух идеалов совпадают и равны $d! \times Volume(\Gamma(g))$. Совпадают и мономиальные базисы соответствующих фактор-колец. Для формального ряда или многочлена g от d переменных якобиев идеал очевидно отличается от идеала, порожденного торическими производными. При этом для *удобного* (в смысле [4]) формального ряда g торические производные имеют тот же многогранник Ньютона $\Gamma_-(g)$, что и исходный ряд g, и потому для ряда g общего положения коразмерность идеала $J_{tor}(g)$ дается простой формулой, аналогичной по структуре формуле для коразмерности якобиевого идеала многочлена Лорана

$$codim_{\mathbb{K}}(J_{tor}(g)) = d! \times Volume(\Gamma_-(g))$$

в то время как коразмерность обычного якобиева идеала $J(g)$ для ряда g общего положения дается некоторой более сложной комбинаторной знакопеременной формулой, так называемой формулой Кушниренко для числа Ньютона $\nu(\Gamma_-)$, включающей как объем V_d самого многогранника Γ_-, так и суммы объемов пересечений этого многогранника со всевозможными координатными подпространствами фиксированной размерности

$$\begin{aligned} &codim_{\mathbb{K}}(J(g)) = \nu(\Gamma_-) = \\ &d! \times V_d(\Gamma_-) - (d-1)! \times V_{d-1}(\Gamma_-) + \dots \\ &+ (-1)^{d-1} \times V_1 + (-1)^d \end{aligned}$$

В. Арнольда беспокоила некоторая сложность и неинтуитивность этой формулы и он предложил задачу, которая стимулировала бы изучение внутренней структуры этой формулы. А именно, В. Арнольд предложил доказать комбинаторно неубывание числа Ньютона при расширении многогранника. В опубликованном списке задач В. Арнольда [15] данная задача датируется 1982 годом и формулируется следующим образом:

Consider a Newton polyhedron $\Delta \in \mathbb{R}^n$ and the number

$$\mu(\Delta) = n!V - \Sigma(n-1)!V_i + \Sigma(n-2)!V_{ij} - \cdots,$$

where V is the volume under Δ, V_i is the volume under Δ on the hyperplane $x_i = 0$, V_{ij} is the volume under Δ on the hyperplane $x_i = x_j = 0$, and so on.
Then $\mu(\Delta)$ grows (non strictly monotonically) as Δ grows (whenever Δ remains coconvex and integer). There is no elementary proof even for $n = 2$.

Решение этой задачи Арнольда для размерности 3 были найдены в работе [16]. В 2020 году московский студент Ф. Селянин анонсировал решение задачи В. Арнольда в произвольной размерности [17]. Подход Ф. Селянина основывался на предложенном им представлении числа Ньютона в виде суммы неотрицательных слагаемых. По устному сообщению Ф. Селянина первая версия этой статьи содержала пробелы и неточности, которые исправлены в третьей, радикально переработанной версии статьи [17] (v3, 25 августа 2024, arXiv:2006.11795v3). В этой статье дан критерий для проблемы Арнольда в произвольной размерности, приведено полное решение в размерности 4 и частичное решение в размерности 5, использующие представление числа Ньютона в виде суммы неотрицательных слагаемых, которое в 2017 году предложил А. Стэплдон (Alan Stapledon) в работе [19]. В 2022 году решение задачи Арнольда для произвольной размерности было анонсировано в работе [20]. По устному сообщению Ф. Селянина, как эта статья так и ее исправленная пятая версия 2024 года [21] содержат серьезные неточности. Поскольку число Ньютона равно числу элементов мономиального базиса фактора алгебры многочленов Лорана по якобиеву идеалу многочлена Лорана общего положения, в духе В.И. Арнольда был бы следующий «материалистический» подход к числу Ньютона:
- рассматривать это число как мощность конечного множества, а именно мощность некоторого построенного с помощью многогранника Ньютона мономиального базиса Якобиевого идеала;
- искать разбиение числа Ньютона на положительные слагаемые путем построения с помощью многогранника Ньютона разбиения этого конечного множества на подмножества, и
- доказывать монотонность числа Ньютона при расширении многогранника, проверяя, что монотонно растут построенные по многограннику Ньютона подмножества базисных мономов. Первым, имеющим самостоятельный интерес, шагом этого подхода, было бы решение задачи, сформулированной в заголовке данного подраздела: *построение явного описания мономиального базиса якобиевого идеала удобного степенного ряда или многочлена f от d переменных, невырожденного относительно своего многогранника Ньютона.*

1.5. Определения и обозначения, не использующие шеллинг многогранника Ньютона

Отмеченные знаком • объекты, обозначения, определения и соглашения, введенные в данном и следующих разделах, будут действовать до конца статьи и не будут переопределяться.

- $d >= 2$ – размерность.
- $\mathbb{K}$ - поле характеристики 0.
- Все рассматриваемые в статье кольца являются $\mathbb{K}$-алгебрами, поэтому мы будем считать термины $\mathbb{K}$-*алгебра*, *алгебра*, *кольцо* синонимами.
- $\mathbb{R}^d$ - векторное пространство над $\mathbb{R}$ строк вида $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$, снабженное обычной топологией. Фиксируем на этом пространстве координаты y_1, y_2, $\ldots$, y_d и назовем их y-*координатами*. Нам будет удобно, в зависимости от контекста, называть элементы $\mathbb{R}^d$ *точками* или *векторами*. Назовем *целой* точку $\mathbb{R}^d$, все y-координаты которой являются целыми числами.
- $Volume$ – неориентированный объем в $\mathbb{R}^d$, нормированный условием: *объем единичного куба в y-координатах равен* 1.
- Пусть X и Y - два множества в $\mathbb{R}^d$. Назовем их *суммой Минковского* множество, определяемое формулой

  $$X \oplus Y = \bigcup_{x \in X,\, y \in Y} (x + y)$$

  Аналогично определяется сумма Минковского конечного числа множеств. Если Y представляет собой одноточечное множество $\{y\}$, состоящее из одного элемента y, то допуская вольность обозначений, будем вместо $X \oplus \{y\}$ писать просто $X \oplus y$.
- $\mathbb{Z}^d$ – вложенная в $\mathbb{R}^d$ коммутативная группа целых точек, то есть строк длины d с целыми компонентами.
- Мы будем рассматривать различные подполугруппы группы $\mathbb{Z}^d$. Как включающие, так и не включающие начало координат. Наиболее важным для данной работы примером подполугруппы без нейтрального элемента может служить множество строк целых чисел, в которых первые r компонент положительны, а остальные неотрицательны.
- Пусть $G \subset \mathbb{Z}^d$ - подполугруппа в $\mathbb{Z}^d$. Будем обозначать через $\mathbb{K}[G]$ полугрупповую алгебру функций на G со значениями в $\mathbb{K}$, принимающих ненулевые значения лишь в конечном числе точек. Умножение в этой алгебре - свертка функций. В частности, мы будем обозначать $K[\mathbb{Z}^d]$ групповую алгебру группы $\mathbb{Z}^d$ над полем $\mathbb{K}$. Удобно говорить об этой алгебре, как об алгебре многочленов Лорана от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_d$ над полем $\mathbb{K}$ с операциями сложение и умножение многочленов.
- *Старшегрань* – грань старшей размерности на границе любого выпуклого многогранника (англ. *facet*) [1] Старшеграни d-мерного многогранника имеют размерность $d - 1$ и являются замкнутыми множествами в $\mathbb{R}^d$.
- Выпуклый многогранник называется *целочисленным*, если все его вершины имеют целые y-координаты и *симплициальным*, если все его старшеграни являются симплексами.
- Многогранник в $\mathbb{R}^d$ назовем *сверх-удобным*, если он выпуклый и содержит некоторую окрестность начала координат. Сверх-удобный многогранник имеет размерность d, а его граница покрыта гранями размерности $d - 1$. Очевидно, что каждый луч, исходящий из начала координат, пересекает границу сверх-удобного многогранника ровно в одной точке. Свойство сверх-удобности многогранника не сохраняется при параллельных переносах.
- Γ - сверх-удобный симплициальный многогранник в $\mathbb{R}^d$ с целыми вершинами. Этот многогранник будет фиксирован до конца настоящей статьи. Через $\partial\Gamma$ обозначим границу многогранника Γ.
- N – число старшеграней многогранника Γ
- L – число вершин многогранника Γ
- В данной статье мы будем обозначать

  \- старшегрань, участвующую в текущем рассуждении, как Δ
  \- старшеграни, определенные выбранным ниже шеллингом, как $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$
  \- вершины, участвующие в текущем рассуждении, как v, $v_1, \ldots\ v_d$
- Для любой старшеграни Δ сверх-удобного многогранника Γ вектора вершин $v_1, \ldots\ v_d$ этой старшеграни линейно независимы. Обозначим через $Cone(\Delta)$ рациональный симплициальный конус с образующими $v_1, \ldots\ v_d$, то

[1] В русском иногда используют сокращение *гипергрань*, от которого мы решили отказаться в пользу введенного нами нового термина *старшегрань*.

есть множество всевозможных линейных комбинаций векторов $v_1, v_2, \dots, v_d$ с неотрицательными вещественными коэффициентами. Из сверх-удобности многогранника вытекает, что каждый конус $Cone(\Delta)$ является собственным, то есть не содержит никакого одномерного векторного подпространства $\mathbb{R}^d$.

- На каждом симплициальном конусе $Cone(\Delta)$ введем систему координат для работы с объектами, принадлежащими этими конусу. Поскольку векторы вершин грани $v_1, v_2, \dots, v_d$ образуют базис в $\mathbb{R}^d$, существуют линейные функции $c_1, c_2, \dots, c_d$ на R^d, удовлетворяющие условиям $c_i(v_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Эти функции будем называть *c-координатами* на конусе $Cone(\Delta)$. Для точки $p \in Cone(\Delta)$ положим $C(p) = (c_1(p),\ c_2(p),\ \dots,\ c_d(p))$.
- Полугруппой вершин $V(\Delta)$ старшеграни Δ назовем множество всевозможных линейных комбинаций вершин $v_1, v_2, \dots, v_d$ с неотрицательными целыми коэффициентами. Это множество совпадает с множеством точек конуса $Cone(\Delta)$ с неотрицательными целыми c-координатами, поэтому эта полугруппа изоморфна свободной коммутативной аддитивной полугруппе строк длины d, составленных из неотрицательных целых чисел.
- Полной полугруппой $A(\Delta)$ старшеграни Δ назовем множество точек конуса $Cone(\Delta)$ с целыми y-координатами. Поскольку образующие полугруппы вершин $V(\Delta)$ имеют целые у-координаты, все элементы полугруппы вершин имеют целые у-координаты, то есть $V(\Delta) \subseteq A(\Delta)$;
- Сдвигом точки $p \in Cone(\Delta)$ на элемент $g \in V(\Delta)$ назовем точку $p + g \in Cone(\Delta)$. Очевидно, что при $g_1 \neq g_2$ сдвиги любой точки $p \in Cone(\Delta)$ на g_1 и g_2 не совпадают. Орбитой точки $p \in Cone(\Delta)$ под действием полугруппы вершин $V(\Delta)$ назовем множество всех сдвигов этой точки: $\bigcup_{g\in V}(p + g)$. Полная полугруппа старшеграни $A(\Delta)$ инвариантна относительно сдвигов на элементы полугруппы вершин, то есть орбита любой точки $p \in A(\Delta)$ под действием полугруппы вершин лежит в $A(\Delta)$.
- Число точек в конечном множестве X будем обозначать $\#X$.

1.6. К-алгебра многочленов Лорана

Назовем *мономом* от формальных переменных $x_1, x_2, \dots, x_d$ выражение вида $x^n = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$, где $n \in \mathbb{Z}^d$. Будем говорить, что моном x^n соответствует точке n группы $/Z^d$. *Показателем степени* монома $x^n = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$ будем называть вектор-строку $Log(x^n) = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$. Очевидно, что для монома $m = x^n$ справедливо тождество $m = x^{Log(m)}$. Моном с нулевым показателем степени будем называть *единичным*. *Одночленом* назовем формальное произведение скаляра из поля $\mathbb{K}$ на моном. Одночлен называется нулевым, если скаляр равен нулю. Ненулевым многочленом Лорана назовем непустую сумму ненулевых одночленов. *Нулевым многочленом* Лорана назовем сумму пустого множества одночленов и будем обозначать этот многочлен тем же символом, что и нулевой элемент поля $\mathbb{K}$. Каждый многочлен Лорана задает функцию на $\mathbb{Z}^d$ со значениями в $\mathbb{K}$, принимающую лишь конечное число ненулевых значений. Умножению многочленов Лорана соответствует свертка финитных функций на группе $\mathbb{Z}^d$. Таким образом, многочлены Лорана могут рассматриваться как групповая $\mathbb{K}$-алгебра $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$ группы $\mathbb{Z}^d$. Кроме группы $\mathbb{Z}^d$, мы будем рассматривать подполугруппы в $\mathbb{Z}^d$, в том числе подполугруппы без нейтрального элемента. Мы будем рассматривать полугрупповые $\mathbb{K}$-алгебры таких полугрупп. Их элементы также будем называть многочленами Лорана. Если подполугруппа $P \subset \mathbb{Z}^d$ не содержит точку 0, то есть не имеет нейтрального элемента, то операция умножение в $\mathbb{K}$-алгебре $\mathbb{K}[P]$ не будет иметь нейтрального элемента. Термины *моном*, *показатель степени* и *одночлен* для полугрупповых $\mathbb{K}$-алгебр определяются аналогично. В частности, термин *моном* всегда будет пониматься как моном от фиксированного набора формальных переменных $x_1, x_2, \dots, x_d$.

Носителем $supp(f)$ ненулевого многочлена Лорана f будем называть множество показателей степени входящих в него ненулевых мономов. Иногда многочлен Лорана определяют как конечную сумму произвольных одночленов, в этом случае носителем нужно называть множество мономов, входящих в такую сумму с ненулевым коэффициентом:

$$supp(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \lambda_n x^n) = \{n \in \mathbb{Z}^d : \lambda_n \neq 0\}$$

Носитель нулевого элемента кольца многочленов Лорана будем считать неопределенным.

1.7. Набросок алгоритма построения мономиального базиса фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ и формулировка основной теоремы

Для простоты, в данной статье мы ограничиваемся построением базиса для таких симплициальных многогранников, которые содержат некоторую окрестность начала координат (мы назоваем такие многогранники *сверх-удобными*). Множество мономов базиса строится как объединение непересекающихся групп мономов, отвечающих старшеграням многогранника Γ. Мы определяем не один единственный базис, а целое семейство базисов, каждый из которых строится по так называемому *шеллингу* выпуклого симплициального многогранника Γ. Шеллингом симплициалтного многогранника Γ называется упорядочение старшеграней многогранника

$$sh = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N)$$

удовлетворяющее некоторым условиям. Эти условия мы сформулируем ниже для симплициальных многогранников. Из этих условий вытекает, в частности геометрически наглядное свойство последовательности sh, а именно, при $i \in [1, N-1]$ объединение первых i старшеграней шеллинга гомеоморфно диску.

1.7.1. Шеллинг-расширение Γ^{sh} сверх-удобного многогранника Ньютона Γ

Для каждой старшеграни $\Delta \in \partial\Gamma$ сверх-удобного многогранника Ньютона Γ построим d отрезков, соединяющих начало координат с вершинами старшеграни и выкинем из каждого отрезка одну из двух концевых точек. Возьмем сумму Минковского получившихся d полуинтервалов.

Это множество точек является *полу-открытым параллелепипедом* в смысле определения (5) раздела 2.4. ниже.

Для каждой старшеграни такой параллелепипед можно построить 2^d способами. Мы хотели бы для каждой старшеграни выбрать один из этих способов так, чтобы построенные N полу-открытых параллелепипедов не пересекались попарно. Из существования шеллинга sh любого выпуклого многогранника, доказанного в 1971 году Брюггерсером и Мани, вытекает, что такой выбор действительно можно сделать. Мы доказываем, что для любого шеллинга sh симплициального сверх-удобного многогранника Γ полу-открытые параллелепипеды старшеграней можно индуктивно выбирать так, что они не будут пересекаться, и их объединение - незамкнутый, и как правило, невыпуклый многогранник, который мы будем обозначать Γ^{sh} - будет покрывать внутренность Γ. Известно [22] - и мы повторим это доказательство ниже в разделе 2.4.1. - что число целых точек в любом целочисленном полу-открытом параллелепипеде равно его объему. Поэтому объем построенного незамкнутого d-мерного многогранника Γ^{sh} окажется равным $d! \times Volume(\Gamma)$, а число целых точек в Γ^{sh} будет равно его объему:

$$d! \times Volume(\Gamma) = Volume(\Gamma^{sh}) = \#(\Gamma^{sh} \cap \mathbb{Z}^d)$$

Теорема (Основная теорема). *Фиксируем сверх-удобный симплициальный многогранник Ньютона Γ и шеллинг sh этого многогранника. Тогда для многочленов Лорана $g_1, g_2, \ldots, g_d$ общего положения с носителями в множестве Γ в качестве мономиального базиса фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ можно взять множество $\mathbb{B}^{sh}$ всех мономов, показатели степени которых принадлежит объединению всех полу-открытых параллелепипедов, из которых составлен Γ^{sh}.*

Тем самым мы получаем новую формулировку и новое доказательство теоремы Кушниренко о числе решений несмешанной системы многочленов Лорана с симплициальным многогранником Ньютона.

Заметим, что в нашей конструкции базиса есть довольно большой произвол. Во-первых, базис зависит от выбора шеллинга, а шеллингов у выпуклого многогранника много. Во-вторых, при умножения всех образующих идеала $(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ на моном идеал не меняется, однако многогранник Γ смещается в $\mathbb{R}^d$ на целочисленный вектор. Поэтому в качестве начала координат можно выбрать любую целую точку внутри многогранника после чего наши конструкции дадут на выходе другую фильтрацию Ньютона и другой базис, так как наша конструкция "отбирает" в базис мономы, минимизируя их ньютоновские степени, которые зависят от выбора начала координат.

Впрочем, вторая неоднозначность исчезнет при переходе от многочленов Лорана к обычным многочленам или формальным рядам.

2. Шеллинг сверх-удобного целочисленного симплициального многогранника и определяемые им объекты

2.1. Определение шеллинга

В работе [13] 1971 года было дано определение *шеллинга* выпуклого многогранника и доказано, что для любого выпуклого многогранника шеллинг существует. Шеллингом называется линейное упорядочение всех старшеграней многогранника, удовлетворяющее некоторым условиям. У заданного многогранника существует много шеллингов. Известно, в частности, что начальную и конечную старшеграни шеллинга можно выбрать произвольно. Нам понадобится определение шеллинга только для выпуклых симплициальных многогранников.

Определение 1. ***Шеллингом*** *симплициального многогранника* Γ *называется упорядочение (нумерация) всех старшеграней* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ *многогранника* Γ*, удовлетворяющее следующему условию: для любого* $i >= 2$ *пересечение старшеграни* Δ_i *с объединением старшеграней* $\Delta_1 \cup \Delta_2, \ldots \cup \Delta_{i-1}$ *является объединением некоторого ненулевого числа* r *подграней коразмерности один старшеграни* Δ_i.

Фиксируем до конца настоящей статьи шеллинг sh выпуклого симплициального сверх-удобного d-мерного многогранника Ньютона Γ:

$$sh = (\Delta_1, \Delta_2, \ \ldots\ , \Delta_N) \tag{1}$$

Ниже $\Delta_1, \Delta_2, \ \ldots\ , \Delta_N$ будут всегда означать элементы именно этого фиксированного шеллинга. Мы будем называть Δ_1 *начальной* старшегранью шеллинга, а остальные старшеграни будем называть *типовыми* старшегранями шеллинга.

В этой статье мы передоказываем один известный комбинаторныя результат (подраздел 3.5., свойство Дэна-Соммервилля ряда Пуанкаре, построенного по градуировке Ньютона). Для его доказательства нам понадобятся а) свойство "обратимости" шеллинга выпуклого симплициального многогранника и б) утверждение о "дополнительности" пересечений любой старшеграни многогранника Ньютона с предшествующими гранями прямого и обратного шеллингов.

Утверждение 1. *Пусть*

$$sh = (\Delta_1, \Delta_2, \ \ldots\ , \Delta_N) \tag{2}$$

шеллинг выпуклого симплициального многогранника Γ *и*

$$\overline{sh} = (\Delta_N, \ldots, \Delta_2, \Delta_1) \tag{3}$$

упорядочение старшеграней в обратном порядке. Тогда $\overline{sh}$ *также является шеллингом.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [23, lemma 8.10.]. Назовем шеллинги sh и $\overline{sh}$ *взаимно обратными.*

Утверждение 2. *Пусть (2) и (3) два взаимно обратных шеллинга.*
Тогда для $1 < i < N$ *каждая подгрань коразмерности один старшеграни* Δ_i *принадлежит ровно одному из пересечений*

$$\Delta_i \cap (\Delta_1 \cup \Delta_2, \ldots \cup \Delta_{i-1}) \tag{4}$$

или

$$\Delta_i \cap (\Delta_N \cup \Delta_{N-1}, \ldots \cup \Delta_{i+1}) \tag{5}$$

фигурирующих в определениях прямого и обратного шеллингов.

Доказательство. Для $i \in [2, N-1]$ отличные от Δ_i старшеграни многогранника Γ разбиваются на два непустые последовательности:
- элементы шеллинга sh, которые предшествуют старшеграни Δ_i

$$(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{i-1}) \tag{6}$$

и элементы обратного шеллинга $\overline{sh}$, которые предшествуют старшеграни Δ_i

$$(\Delta_N, \Delta_{N-1}, \ldots, \Delta_{i+1}) \tag{7}$$

Каждая грань размерности $d-2$ любого выпуклого d-мерного многогранника принадлежит ровно двум старшеграням этого многогранника. Поэтому любая подгрань δ коразмерности один старшеграни Δ_i многогранника Γ должна к принадлежать границе ровно еще одной старшеграни многогранника, отличной от Δ_i. Эта вторая старшегрань входит либо в последовательность (6) либо в последовательность (7). В первом случае подгрань δ входит в пересечение (4), во втором случае подгрань δ входит в пересечение (5). $\square$

2.2. Покрытие и разбиение границы симплициального выпуклого многогранника, определяемые шеллингом

Конструкция шеллинга симплициального многогранника фактически относится не к самому многограннику, а к структуре симплициального комплекса на его границе, возникающей при симплициальной триангуляции границы многогранника. Как подмножество линейного топологического пространства R^d, граница $\partial\Gamma$ многогранника Γ покрывается замкнутыми выпуклыми старшегранями:

$$\partial\Gamma = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_N \qquad (8)$$

Существование шеллинга позволяет построить возрастающую последовательность составленных из старшеграней подмножеств границы многогранника: $\varnothing = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_N = \partial\Gamma$ (S от слова *Shelling*), в которой каждое подмножество, кроме последнего, гомеоморфно $(d-1)$-диску, а последнее гомеоморфно $(d-1)$-мерной сфере. Эта последовательность строится так:

$$\begin{aligned} &S_1 = \Delta_1 \\ &S_2 = \Delta_1 \cup \Delta_2 \\ &S_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &S_N = (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_N) \end{aligned} \qquad (9)$$

Мы назовем замкнутые триангулированные множества $S_1, S_2, \ldots, S_N$ *подкомплексами.* Теоретико-множественная разность $S_i \backslash S_{i-1}$ соседних подкомплексов этой последовательности для $i = 1, 2, \ldots, N$ принадлежит старшеграни Δ_i, поэтому мы назовем эту разность sh-старшегранью и обозначим Δ_i^{sh}. Мы будем называть Δ_1^{sh} *начальной sh-старшегранью.* Начальная sh-старшегрань совпадает со старшегранью Δ_1 и является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^d$. Остальные sh-старшеграни, то есть Δ_i^{sh} при $i \geq 2$ будем называть *типовыми.* Типовая sh-старшегрань Δ_i^{sh} является собственным подмножеством старшеграни Δ_i и, согласно определению шеллинга, получается выбрасыванием из старшеграни Δ_i ненулевого количества r ее подграней коразмерности один. Любая из типовых sh-старшеграней Δ_i^{sh} не замкнута в $\mathbb{R}^d$ и является разностью двух замкнутых множеств, выпуклого $d-1$-мерного множества Δ_i и некоторого непустого $(d-2)$-мерного множества, лежащего на границе Δ_i. Легко видеть, и мы проверим это ниже, что любая sh-старшегрань выпукла. Из определения sh-старшеграней вытекает, что они попарно не пересекаются и что sh-старшеграни $\Delta_1^{sh}, \Delta_2^{sh}, \ldots, \Delta_i^{sh}$, образуют разбиение подкомплекса S_i. Поэтому, для $i \geq 2$ подкомплекс S_i есть дизъюнктное объединение подкомплекса S_{i-1} и sh-старшеграни Δ_i^{sh}.

$$\begin{aligned} &S_1 = \Delta_1^{sh} \\ &S_2 = S_1 \cup \Delta_2^{sh} = \Delta_1^{sh} \cup \Delta_2^{sh} \\ &S_3 = S_2 \cup \Delta_3^{sh} = \Delta_1^{sh} \cup \Delta_2^{sh} \cup \Delta_3^{sh} \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &S_i = S_{i-1} \cup \Delta_i^{sh} = (\Delta_1^{sh} \cup \Delta_2^{sh} \cup \ldots \cup \Delta_i^{sh}) \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &S_N = S_{N-1} \cup \Delta_N^{sh} = (\Delta_1^{sh} \cup \Delta_2^{sh} \cup \ldots \cup \Delta_N^{sh}) \end{aligned} \qquad (10)$$

Правые части формул (10) дают разбиение подкомплексов $S_1, S_2, \ldots, S_N$ на sh-старшеграни. В частности, на sh-старшеграни разбивается граница многогранника:

$$\partial\Gamma = (\Delta_1^{sh} \cup \Delta_2^{sh} \cup \ldots \cup \Delta_N^{sh}) \qquad (11)$$

Граница выпуклого многогранника Γ гомеоморфна $(d-1)$-мерной сфере. Из определения (1) шеллинга симплициального многогранника нетрудно вывести, что для любого $i < N$ подкомплекс $S_i = (\Delta_1^{sh} \cup \Delta_2^{sh} \cup \ldots \cup \Delta_i^{sh})$ является многогранной гиперповерхностью, гомеоморфной замкнутому $d-1$-мерному диску (см. [13]).

2.3. Покрытия и разбиения $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$, определяемые шеллингом

Напомним, что в разделе 1.5. с каждой старшегранью $\Delta \subset \partial(\Gamma)$ мы связали следующие объекты, принадлежащие $\mathbb{R}^d$ или Z^d.

- $Cone(\Delta)$ – конус грани Δ: объединение всех замкнутых лучей, исходящих из начала координат и проходящих через некоторую точку грани Δ. Множество $Cone(\Delta)$ замкнуто в R^d и в силу выпуклости грани Δ является полугруппой по сложению с нейтральным элементом $0 \in \mathbb{R}^d$.
- $A(\Delta)$ – полугруппа с нейтральным элементом 0, состоящая изо всех целых точек конуса $Cone(\Delta)$. Мы называем подполугруппу $A(\Delta)$ *полной полугруппой*

старшеграни. Полугрупповую $\mathbb{K}$-алгебру $\mathbb{K}[A(\Delta)]$ будем называть *полной алгеброй старшеграни.*

- $V(\Delta)$ – подполугруппа с нейтральным элементом в $A(\Delta)$, порожденная всеми вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_d$ старшеграни Δ. Полугруппа $V(\Delta)$ порождена вершинами старшеграни свободно. Эту полугруппу мы называем *полугруппой вершин* старшеграни Δ. Полугрупповую $\mathbb{K}$-алгебру $\mathbb{K}[V(\Delta)]$ будем называть *алгеброй вершин* старшеграни Δ. Эта $\mathbb{K}$-алгебра изоморфна алгебре многочленов от d независимых переменных. Поскольку полугруппа вершин любой старшеграни Δ является подполугруппой полной полугруппы $A(\Delta)$, полная алгебра $K[A(\Delta)]$ любой старшеграни Δ является является модулем над алгеброй вершин $K[V(\Delta)]$ этой старшеграни. Легко видеть, и мы проверим это ниже, что этот модуль конечно порожден и свободно порожден.

Ввиду сверх-удобности многогранника Γ коммутативные группы $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$ допускают покрытия полугруппами с нейтральным элементом

$$\mathbb{R}^d = Cone(\Delta_1) \cup Cone(\Delta_2) \cup \ldots \cup Cone(\Delta_N) \quad (12)$$

$$\mathbb{Z}^d = A(\Delta_1) \cup A(\Delta_2) \cup \ldots \cup A(\Delta_N)$$

Пользуясь свойствами шеллинга (1) из определения (1) построим по этим покрытиям разбиения $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$ на подполугруппы, которые, за одним исключением, не имеют нейтрального элемента. Для $i > 1$ определим подмножество $Csh_i \subset Cone(\Delta_i)$ и подмножество $Ash_i \subset A(\Delta_i)$ равенствами

$$Csh_i = Cone(\Delta_i) \setminus (Cone(\Delta_1) \cdots \cup Cone(\Delta_{i-1})) \quad (13)$$

$$Ash_i = A(\Delta_i) \setminus (A(\Delta_1) \cup \cdots \cup A(\Delta_{i-1})) \quad (14)$$

Поскольку конус $Cone(\Delta_1)$ содержит начало координат, при $i > 1$ множества Csh_i и Ash_i начала координат не содержат. Ниже мы проверим, что при $i > 1$ множества Csh_i и Ash_i являются полугруппами без нейтрального элемента. Отсюда следует, что для $i > 1$ определена полугрупповая алгебра $\mathbb{K}[Ash_i]$ без мультипликативного нейтрального элемента. Легко видеть, и мы проверим это ниже, что прибавление элемента полугруппы вершин старшеграни Δ_i к элементу полугруппы Ash_i не выводит за пределы этой полугруппы, поэтому полугрупповая алгебра $\mathbb{K}[Ash_i]$ является модулем над алгеброй вершин $\mathbb{K}[V(\Delta_i)]$ старшеграни Δ_i. Мы докажем ниже, что этот модуль конечно порожден и свободно порожден.

Для единообразия обозначений положим $Csh_1 = Cone(\Delta_1)$ и $Ash_i = A(\Delta_1)$. Для $i \in [1, N]$ мы будем называть множества Csh_i sh-конусами, а множества Ash_i sh-полугруппами. Из определений (13) и (14) вытекает

Утверждение 3. *$\mathbb{R}^d$ допускает разбиение на sh-конуса и $\mathbb{Z}^d$ допускает разбиение на sh-полугруппы :*

$$\mathbb{R}^d = Csh_1 \cup Csh_2 \cup \ldots \cup Csh_N \quad (15)$$

$$\mathbb{Z}^d = Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_N \quad (16)$$

Очевидно, что для любого $i \in [1, N]$ множество Ash_i есть не что иное, как подмножество целых точек множества Csh_i:

$$Ash_i = \mathbb{Z}^d \cap Csh_i \quad (17)$$

2.4. Полу-открытые параллелепипеды и множества их целых точек, как фундаментальные области действий полугрупп вершин на sh-конусах и sh-полугруппах

Две системы координат на конусе $Cone(\Delta)$. Характеризация полугрупп $A(\Delta)$ и $V(\Delta)$. На всем пространстве $\mathbb{R}^d$ есть глобальная система координат $y_1, \ldots, y_d$. Мы называем эти координаты y-координатами. Напомним, что в разделе 1.5. для каждой старшеграни Δ мы ввели в $\mathbb{R}^d$ дополнительную систему c-координат для работы с объектами, принадлежащими конусу $Cone(\Delta)$.

Утверждение 4. *В c-координатах:*

- *множество $Cone(\Delta)$ является замкнутым ортантом точек с неотрицательными c-координатами,*
- *грань Δ представляет собой множество точек, у которых сумма всех c-координат равна 1 и все c-координаты неотрицательны,*
- *конус с вершиной в начале координат и основанием, равным старшеграни Δ, представляет собой множество точек, у которых сумма всех c-координат меньше или равна 1 и все c-координаты неотрицательны,*
- *для любой вершины v старшеграни Δ одна из c-координат равна 1, а остальные c-координаты равны 0.*

Доказательство очевидно. □

Определение 2. *Гранью конуса $Cone(\Delta)$ назовем подмножество конуса, на котором фиксированный набор из r c-координат обращается в ноль. Грань называется собственной, если $1 \leq r$.*

В разделе 6. нам понадобится следующее очевидное утверждение.

Утверждение 5. *Пусть F некоторая собственная грань конуса $Cone(\Delta)$ и a, b две точки конуса. Если $(a + b) \in F$, то $a \in F$ и $b \in F$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что грань F задается приравниванием нулю первых r c-координат

$$F = \{x \in Cone(\Delta) : c_1(x) = c_2(x) = \ldots = c_r(x)\}$$

Поскольку каждая из этих координат c_i линейна и на конусе $Cone(\Delta)$ принимает неотрицательные значения из равенства $c_i(a+b) = c_i(a) + c_i(b) = 0$ вытекает $c_i(a) = 0$ и $c_i(b) = 0$ то есть $c_1(a) = c_2(a) = \ldots = c_r(a) = 0$ и $c_1(b) = c_2(b) = \ldots = c_r(b) = 0$. $\square$

Поскольку предполагается, что многогранник Γ целочисленный, y-координаты любой его вершины, и, в частности, любой вершины грани Δ, являются целыми числами. Поэтому

- полная полугруппа $A(\Delta)$ старшеграни Δ есть ни что иное, как множество точек конуса $Cone(\Delta)$ с целыми y-координатами,

- полугруппа вершин $V(\Delta)$ есть ни что иное, как множество точек конуса $Cone(\Delta)$ с неотрицательными целыми c-координатами. Поскольку образующие полугруппы вершин $V(\Delta)$ имеют целые y-координаты, все элементы полугруппы вершин имеют целые y-координаты, то есть $V(\Delta) \subseteq A(\Delta)$.

Определение 3. *Будем говорить, что подполугруппа $V(\Delta)$ полугруппы $Cone(\Delta)$* ***действует*** *на множестве $X \subseteq Cone(\Delta)$, если для любой точки $x \in X$ и любого элемента $g \in V(\Delta)$ сумма $x+g$ принадлежит X. Эту сумму назовем сдвигом точки x на вектор $g \in V(\Delta)$. Сдвигом множества $X_0 \subseteq X$ на вектор $g \in V(\Delta)$ назовем сумму Минковского $X_0 \oplus g$. Множество $X_0 \subseteq X$ назовем* ***фундаментальной областью*** *действия полугруппы на X, если любой элемент $x \in X$ однозначно представляется в виде сдвига некоторой точки $x_0 \in X_0$ на некоторый элемент $g_0 \in V(\Delta)$. Другими словами, если сдвиги множества X_0 на всевозможные элементы $V(\Delta)$ образуют разбиение множества X:*

$$X = \bigcup_{g \in V(\Delta)} (X_0 \oplus g)$$

Орбитой *точки $p \in Cone(\Delta)$ под действием полугруппы вершин $V(\Delta)$ назовем множество всех сдвигов этой точки на элементы полугруппы вершин: $\bigcup_{g \in V}(p + g)$. Орбита точки p может быть представлена как $p \oplus V(\Delta)$, то есть как сумма Минковского одноточечного множества $\{p\}$ и полугруппы вершин $V(\Delta)$.*

Замечание 1. *Это определение будет применяться исключительно в двух похожих ситуациях. Во-первых, это определение будет применяться к множеству $Cone(\Delta_1)$ всех точек конуса начальной старшеграни Δ_1 и к дискретному множеству $A(\Delta_1)$ целых точек этого конуса, которые мы назвали полной полугруппой старшеграни Δ_1. Во-вторых, это определение будет применяться к множеству Csh_i всех точек sh-конуса некоторой типовой старшеграни Δ_i и к дискретному множеству Ash_i целых точек этого sh-конуса. Заметим, что во всех рассматриваемых ситуациях сдвиги любой точки $p \in Cone(\Delta)$ на разные векторы $g_1, g_2 \in V(\Delta)$ не совпадают, поэтому для любой точки $p \in Cone(\Delta)$ отображение $V(\Delta) \to Cone(\Delta)$ заданное формулой $g \mapsto (p + g)$, является инъекцией.*

Ниже нам понадобятся две функции $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ для округления вещественного числа x:

$$\begin{aligned} floor(x) &= max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} \\ ceil(x) &= min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\} \end{aligned} \tag{18}$$

2.4.1. Фундаментальная область действия полугруппы вершин на конусе начальной старшеграни и ее полной полугруппе

Пусть Δ некоторая старшегрань многогранника Γ, например, начальная старшегрань Δ_1 шеллинга sh. Очевидно, что полугруппа $V(\Delta)$ действует на множестве $Cone(\Delta)$, а также действует на $A(\Delta)$. Иными словами, добавление вектора с целыми неотрицательными c-координатами не выводит за пределы конуса $Cone(\Delta)$ или за пределы полугруппы $A(\Delta)$, состоящей из точек конуса $Cone(\Delta)$ с целыми y-координатами.

Рассмотрим произвольную точку $p \in Cone(\Delta)$. Обозначим через $C(p)$ вектор c-координат этой точки. Обозначим через $floor(p)$ вектор с c-координатами

$$floor(c_1(p)),\ floor(c_2(p)),\ \dots\ floor(c_d(p))$$

Все координаты вектора $floor(p)$ являются неотрицательными целыми числами. Разложим вектор $C(p)$ c-координат точки p в сумму двух слагаемых:

$$C(p) = (C(p) - floor(p)) + floor(p) \tag{19}$$

Второе слагаемое этой суммы принадлежит полугруппе вершин $V(\Delta)$, а каждая c-координата первого слагаемого принадлежат интервалу $[0, 1)$. Это означает, что при действии полугруппы вершин $V(\Delta)$ на конусе $Cone(\Delta)$ любая точка представима как сумма точки с нулевыми целыми частями c-координат и точки с целыми c-координатами. Достаточно очевидно, что такое представление единственно. Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 6. *Фундаментальной областью действия полугруппы вершин старшеграни Δ на конусе $Cone(\Delta)$ является ограниченное подмножество конуса $Cone(\Delta)$, определяемое двойными неравенствами:*

$$\Pi(\Delta) = \{p \in Cone(\Delta) : \begin{cases} 0 \le c_1(p) < 1 \\ 0 \le c_2(p) < 1 \\ \dots \\ 0 \le c_d(p) < 1 \end{cases} \} \tag{20}$$

Геометрически утверждение 6 означает, что весь конус $Cone(\Delta)$ "замащивается" непересекающимися сдвигами целочисленного полу-открытого параллелепипеда $\Pi(\Delta)$ на вектора полугруппы вершин $V(\Delta)$:

$$Cone(\Delta) = \bigcup_{v \in V(\Delta)} \Pi(\Delta) \oplus v \tag{21}$$

Приведенное утверждение и его доказательство общеизвестны, см., например, [22]. Множество $\Pi(\Delta)$ называют *фундаментальным полу-открытым параллелепипедом* (англ. *fundamental half-open parallelepiped*).

Ниже будет дано более общее определение *целочисленного полу-открытого параллелепипеда.* Замыкание фундаментального полу-открытого параллелепипеда старшеграни Δ назовем *параллелепипедом старшеграни* и обозначим $\overline{\Pi}(\Delta)$.

Аналогичное утверждение верно для множества целых точек конуса $Cone(\Delta)$. Действительно, обозначим через $B(\Delta)$ множество целых точек фундаментального полу-открытого параллелепипеда $\Pi(\Delta)$: $B(\Delta) = \Pi(\Delta) \cap Z^d$

Из формулы (20) вытекает, что множество $B(\Delta)$ задается двойными неравенствами:

$$B(\Delta) = \{n \in A(\Delta) : \begin{cases} 0 \le c_1(n) < 1 \\ 0 \le c_2(n) < 1 \\ \dots \\ 0 \le c_d(n) < 1 \end{cases} \} \tag{22}$$

Определение 4. *Назовем множество $B(\Delta)$* ***базисом*** *полугруппы $A(\Delta)$. Это множество конечно.*

Утверждение 7. *Множество $B(\Delta)$ является фундаментальной областью действия полугруппы вершин старшеграни грани Δ на полной полугруппе старшеграни* A(Δ), *то есть*

$$A(\Delta) = \bigcup_{v \in V(\Delta)} B(\Delta) \oplus v \tag{23}$$

Доказательство. Пусть p произвольная точка $A(\Delta)$. По формуле (19) точка p есть сумма двух слагаемых, первое из которых принадлежит $B(\Delta)$, второе имеет целочисленные c-координаты, то есть принадлежит $V(\Delta)$. Легко видеть, что это представление единственно. □

Тот факт, что множество $B(\Delta)$ является фундаментальной областью можно переформулировать следующим образом.

Утверждение 8. *Сдвиги множества $V(\Delta)$ на элементы множества $B(\Delta)$ попарно не пересекаются и их объединение дает $A(\Delta)$:*

$$A(\Delta) = \bigcup_{b \in B(\Delta)} V(\Delta) \oplus b \tag{24}$$

Утверждение 8 может быть переформулировано в терминах конечно порожденных модулей.

Утверждение 9. *Как модуль над алгеброй $\mathbb{K}[V(\Delta)]$ алгебра $\mathbb{K}[A(\Delta)]$ свободно порождена мономами, отвечающими точкам множества $B(\Delta)$.*

Доказательство. Для старшеграни Δ и точки $b \in B(\Delta)$ обозначим через $\mathcal{M}_b$ подмодуль, состоящий из конечных линейных комбинаций мономов в $A(\Delta)$ вида $x^b x^v$, где $v \in V(\Delta)$, то есть подмодуль, свободно порожденный элементом x^b. Согласно утверждению 8, $A(\Delta) = \bigcup_{b \in B(\Delta)} \{b\} \oplus V(\Delta)$ и значит аддитивная группа $\mathbb{K}$-алгебры $\mathbb{K}[A(\Delta)]$ есть прямая сумма всех таких подмодулей:

$$\mathbb{K}[A(\Delta)] = \bigoplus_{b \in B(\Delta)} \mathcal{M}_b$$

□

Напомним, что число точек в конечном множестве B мы обозначаем $\#B$.

Утверждение 10. *Число целых точек в фундаментальном полу-открытом параллелепипеде* $\Pi(\Delta)$ *равно его объему, то есть*

$$\#B(\Delta) = Volume(\Pi(\Delta)) \tag{25}$$

Равенство (25) общеизвестно, см. например [22]. Тем не менее для полноты приведем

Набросок доказательства. Обозначим через $k\Pi(\Delta)$ растянутый в натуральное число k раз относительно начала координат полу-открытый параллелепипед $\Pi(\Delta)$. Этот растянутый полу-открытый параллелепипед $k\Pi(\Delta)$ задается двойными неравенствами

$$k\Pi(\Delta) = \{p \in Cone(\Delta) : \left\{ \begin{array}{l} 0 \le c_1(p) < k \\ 0 \le c_2(p) < k \\ \dots \\ 0 \le c_d(p) < k \end{array} \right. \} \tag{26}$$

и может быть получен объединением непересекающихся сдвигов исходного полу-параллелепипеда на элементы множества X, состоящего из k^d целочисленных векторов, каждая c-координата которых есть неотрицательное целое число, меньшее k. Аналогично, множество целых точек в $k\Pi(\Delta)$ может быть получено объединением непересекающихся сдвигов множества $B(\Delta)$ на то же самое множество X целочисленных векторов, поэтому

$$Volume(k\Pi(\Delta)) = Volume(\Pi(\Delta)) \times k^d$$

и

$$\#(k\Pi(\Delta) \cap A(\Delta)) = \#B(\Delta) \times k^d \tag{27}$$

При $k \to \infty$ число целых точек в растянутом полу-открытом параллелепипеде будет равно его объему с точностью до поправочного члена порядка площади поверхности замыкания растянутого полу-открытого параллелепипеда, которая пропорциональна k^{d-1}, то есть

$$\#(k\Pi(\Delta) \cap A(\Delta)) = Volume(\Pi(\Delta)) \times k^d + O(k^{d-1}) \tag{28}$$

Из (27) и (28) получаем

$$\#B(\Delta) \times k^d = Volume(\Pi(\Delta)) \times k^d + O(k^{d-1})$$

или, после деления на k^d

$$\#B(\Delta) = Volume(\Pi(\Delta)) + O(k^{d-1})/k^d$$

Устремив k к бесконечности, получаем равенство (25). □

Фундаментальный целочисленный полу-открытый параллелепипед $\Pi(\Delta)$ является частным случаем произвольного целочисленного полу-открытого параллелепипеда, который мы сейчас определим с помощью сумм Минковского.

Определение 5. *Пусть a и b две различные точки с целыми координатами в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $[a, b)$ или, эквивалентно, $(b, a]$ и назовем целочисленным полуинтервалом множество точек в $\mathbb{R}^d$ вида $a + (b - a)t$, где t пробегает полуинтервал $[0, 1)$ на вещественной прямой. Обозначим также через $[a, b]$ замыкание в $\mathbb{R}^d$ множества $[a, b)$. Назовем целочисленным полу-открытым параллелепипедом сумму Минковского d целочисленных полуинтервалов вида*

$$\Pi = [a_1, a_1 + v_1) \oplus [a_2, a_2 + v_2) \oplus \ldots \oplus [a_d, a_d + v_d) \tag{29}$$

в которой векторы $v_1, v_2, \ldots, v_d$ линейно независимы. Назовем фундаментальным целочисленным полу-открытым параллелепипедом сумму Минковского d целочисленных полуинтервалов вида

$$[0, v_1) \oplus [0, v_2) \oplus \ldots \oplus [0, v_d) \tag{30}$$

в которой векторы $v_1, v_2, \ldots, v_d$ линейно независимы.

Нетрудно проверить, что формулы (30) и (20) определяют одно то же множество. Действительно, поскольку вектора вершин любой грани Δ сверх-удобного многогранника Γ линейно независимы и имеют целые y-координаты, заданная формулой (20) фундаментальная область $\Pi(\Delta)$ представляется в виде (30) и потому является фундаментальным целочисленным полу-открытым параллелепипедом в терминах определения 5 раздела 2.4.. Ниже мы проверим, что любой целочисленный полу-открытый параллелепипед получается из фундаментального параллельным переносом на некоторый вектор с целыми координатами. Поэтому из утверждения 10 легко вывести более общее утверждение.

Утверждение 11. *Мощность множества целых точек любого целочисленного полу-открытого параллелепипеда равна его объему.*

Доказательство. Проверим, что любой целочисленный полу-параллелепипед получается из стандартного параллельным переносом на некоторый вектор с целыми координатами. Пусть

$$\Pi = [a_1, a_1+v_1) \oplus [a_2, a_2+v_2) \oplus \ldots \oplus [a_d, a_d+v_d)$$

сумма Минковского целочисленных полу-открытых интервалов, где векторы $v_1, v_2, \ldots, v_d$ линейно независимы. Тогда целочисленный полу-открытый параллелепипед Π получается параллельным переносом на вектор $a_1 + a_2 + \ldots + a_d$ заданного в c-координатах формулой (20) полу-открытого параллелепипеда

$$[0, v_1) \oplus [0, v_2) \oplus \ldots \oplus [0, v_d) \qquad (31)$$

При параллельном переносе целочисленного полу-открытого параллелепипеда Π на целочисленный вектор объем Π и число целых точек в нем не меняются, и в результате переноса получаем фундаментальный полу-параллелепипед, объем которого равен числу целых точек согласно утверждению 10. $\square$

2.4.2. Фундаментальные области действия полугруппы вершин старшеграни на sh-конусе и sh-полугруппе этой старшеграни

Утверждение 12. *Для любой старшеграни Δ_i фундаментальная область действия полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ на sh-конусе Csh_i существует и является целочисленным полу-открытым параллелепипедом.*

Мы дадим два доказательства этого утверждения. Координатное доказательство и доказательство в терминах сумм Минковского. Напомним, что начальная старшегрань любого шеллинга выпуклого многогранника является замкнутой, а все остальные старшеграни шеллинга - мы назвали их типовыми - получаются удалением из замкнутой старшеграни некоторого ненулевого числа замкнутых подграней этой старшеграни коразмерности один. Мы ограничимся доказательством утверждения 12 только для типовых старшеграней, доказательство для начальной старшеграни отличается только обозначениями и оставляется читателю.

Координатное доказательство. Мы начнем это доказательство с координатного описания sh-конуса Csh_i. Пусть Δ_i - некоторая типовая старшегрань (то есть $i > 1$). По определению шеллинга, sh-старшегрань Δ_i^{sh} получается из старшеграни Δ_i удалением $r > 0$ подграней коразмерности один. На каждой такой подграни коразмерности один равна нулю одна из c-координат на конусе $Cone(\Delta_i)$, а дополнение к такой подграни задается условием положительности этой c-координаты. Поэтому дополнение ко всем r удаляемым подграням задается условием одновременной положительности r таких c-координат. Не исключаются и граничный случай $r = d$. Без ограничения общности можно считать, что на sh-старшеграни Δ_i^{sh} положительны первые r c-координат. Значит конус Csh_i задается в замкнутом конусе $Cone(\Delta_i)$ неравенствами $0 < c_1(p)$, $0 < c_2(p)$, $\ldots$, $0 < c_r(p)$, а во всем $\mathbb{R}^d$ sh-конус Csh_i задается системой $r > 0$ строгих и $(d - r) \geq 0$ нестрогих неравенств

$$Csh_i = \{p \in \mathbb{R}^d : \left\{ \begin{array}{l} 0 < c_1(p) \\ 0 < c_2(p) \\ \ldots \\ 0 < c_r(p) \\ 0 \leq c_{r+1}(p) \\ 0 \leq c_{r+2}(p) \\ \ldots \\ 0 \leq c_d(p) \end{array} \right. \quad \} \qquad (32)$$

Из этого описания вытекает, что

- множество точек sh-конуса Csh_i замкнуто относительно сложения, значит, замкнуто относительно сложения и его подмножество точек с целыми y-координатами Ash_i;

- добавление любого вектора с неотрицательными c-координатами к точке, удовлетворяющей неравенствам (32), не нарушает этих неравенств, значит полугруппа $V(\Delta_i)$ действует на sh-конусе Csh_i. Наконец, сдвиг целой точки в Csh_i на вектор с неотрицательными целыми y-координатами из множества $V(\Delta_i)$ дает точку Csh_i с целыми координатами, значит $V(\Delta_i)$ действует на Ash_i.

Утверждение 12 может теперь быть детализировано следующим образом.

Утверждение 13. *(a) Фундаментальной областью действия полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ старшеграни Δ_i на sh-конусе Csh_i является подмножество конуса $Cone(\Delta_i)$,* *определяемое двойными неравенствами:*

$$\Pi_i = \{p \in Cone(\Delta_i) : \left\{ \begin{array}{l} 0 < c_1(p) \leq 1 \\ 0 < c_2(p) \leq 1 \\ \ldots \\ 0 < c_r(p) \leq 1 \\ 0 \leq c_{r+1}(p) < 1 \\ 0 \leq c_{r+2}(p) < 1 \\ \ldots \\ 0 \leq c_d(p) \quad < 1 \end{array} \right. \} \tag{33}$$

(b) Множество Π_i, заданное этими двойными неравенствами, является целочисленным полу-открытым параллелепипедом.

Доказательство. Докажем (a). Пусть $p \in Csh_i$, то есть p удовлетворяет неравенствам (32). Воспользуемся функциями, определенными формулой (18), и обозначим через $ceil\_floor(p)$ точку с c-координатами

$$ceil(c_1(p)) - 1, \ \ldots \ ceil(c_r(p)) - 1, \\ floor(c_{r+1}(p)), \ \ldots \ floor(c_d(p)) \tag{34}$$

Разложим вектор c-координат точки p в сумму двух слагаемых:

$$C(p) = (\, C(p) - ceil\_floor(p)\,) + ceil\_floor(p) \tag{35}$$

Докажем, что второе слагаемое этой суммы является вектором с-координат некоторого элемента полугруппы вершин старшеграни Δ_i. Для этого достаточно проверить неотрицательность компонент этого вектора при условии $p \in Csh_i$. Неотрицательность последних $d-r$ компонент вытекает из определения функции $floor$. Неотрицательность первых r компонент вытекает из того, что для точки $p \in Csh_i$ координаты $c_1(p), \ldots, c_r(p)$ положительны и значение функции $ceil$ в формуле (18) для любого положительного аргумента не меньше 1 и после вычитания единицы остается неотрицательным. Легко также видеть, что первое слагаемое формулы (35) удовлетворяет неравенствам (33), то есть является вектором с-координат некоторой точки Π_i. Таким образом доказано, что любая точка $p \in C_i$ получается сдвигом некоторой точки $b \in \Pi_i$ на элемент g полугруппы вершин $V(\Delta_i)$.

Не поленимся проверить, что представление $p = b + g$ единственно. Действительно, если $p = b_1 + g_1 = b_2 + g_2$, то разность $b_1 - b_2$, равная $g_2 - g_1$, имеет целочисленные с-координаты. Из формулы (33) вытекает, что разность любых двух точек Π_i имеет с-координаты, по модулю меньшие 1, и будучи целочисленной, эта разность должна быть равной нулю. Таким образом, представление любой точки $p \in$ в виде сдвига точки $b \in \Pi_i$ на вектор $g \in V(\Delta_i)$ существует и единственно, иными словами сдвиги множества Π_i на всевозможные элементы полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ образуют разбиение sh-конуса Csh_i.

Докажем (b). Это вытекает из того, что множество, заданное двойными неравенствами (33) может быть представлено как сумма Минковского целочисленных полуинтервалов

$$(0, v_1] \oplus \ldots \oplus (0, v_r] \oplus [0, v_{r+1}) \oplus \ldots \oplus [0, v_d) = \\ [v_1, v_1 + (-v_1)) \oplus \ldots \oplus [v_r, v_r + (-v_r)) \oplus \\ [0, v_{r+1}) \oplus \ldots \oplus [0, v_d)$$

где вектора $-v_1, \ldots, -v_r, v_{r+1}, \ldots, v_d$ линейно независимы. Координатное доказательство утверждения 12 завершено. □

Набросок бескоординатного доказательства утверждения 12. Легко видеть, что каждый замкнутый конус $Cone(\Delta_i)$ может быть описан как сумма Минковского d замкнутых лучей, исходящих из начала координат и проходящих через вершины старшеграни Δ_i, а каждый sh-конус Csh_i, полученный удалением r граней из конуса $Cone(\Delta_i)$ может быть описан как сумма Минковского r открытых лучей и $d-r$ замкнутых лучей (открытый луч получается из соответствующего замкнутого луча удалением концевой точки - начала координат). Как и выше, не исключается и граничный случаи $r = d$. Рассмотрим на множестве подмножеств замкнутого конуса $Cone(\Delta_i)$ две бинарные операции: сумма Минковского $\oplus$ и теоретико-множественное объединение $\cup$. Обе операции коммутативны и дистрибутивны и операция $\oplus$ дистрибутивна (и слева и справа) относительно операции $\cup$. Разобъем каждый граничный луч конуса Csh_i на счетное число непересекающихся и последовательно примыкающих друг к другу целочисленных полуинтервалов (в смысле определения 5), занумерованных от нуля до бесконечности и представим Csh_i как сумму Минковского d слагаемых, каждое из которых представляет собой объединение счетного числа непересекающихся целочисленных полуинтервалов:

$$\begin{array}{l} \mathrm{C}sh_i = \\ (\ (0, v_1] \ \cup \ (v_1, 2v_1] \ \cup \ (2v_1, 3v_1] \quad \ldots) \ \oplus \\ (\ (0, v_2] \ \cup \ (v_2, 2v_2] \ \cup \ (2v_2, 3v_2] \quad \ldots) \ \oplus \\ \quad \ldots \ \ldots \ \ldots \\ (\ (0, v_r] \ \cup \ (v_r, 2v_r] \ \cup \ (2v_r, 3v_r] \quad \ldots) \ \oplus \\ (\ [0, v_{r+1}) \cup \ [v_{r+1}, 2v_{r+1}) \cup \ [2v_{r+1}, 3v_{r+1}) \ldots) \ \oplus \\ \quad \ldots \ldots \ldots \\ (\ [0, v_d) \ \cup \ [v_d, 2v_{r+1}) \ \cup \ [2v_d, 3v_d) \quad \ldots) \end{array} \tag{36}$$

Из дистрибутивности суммы Минковского относительно операции объединения вытекает, что мы можем раскрыть скобки в правой части 36, мы получив объединение счетного числа конечных (d слагаемых) сумм Минковского целочисленных полуинтервалов. Если при раскрытии скобок мы будем перебирать элементы в каждой скобке слева направо, то первая сумма получится из первого столбца формулы (36) и будет иметь вид

$$\begin{gathered}(0, v_1] \oplus (0, v_2] \oplus \ldots \oplus (0, v_r] \oplus \\ [0, v_{r+1}) \oplus [0, v_{r+2}) \oplus \ldots \oplus [0, v_d)\end{gathered} \tag{37}$$

Остальные суммы Минковского, получаемые при раскрытии скобок в формуле (36), получаются из первой суммы (37) сдвигами на сумму векторов вершин старшеграни Δ_i с неотрицательными коэффициентами, не равными нулю одновременно, то есть получаются сдвигом первой суммы на ненулевые элементы полугруппы вершин старшеграни Δ_i. Поэтому первая сумма является фундаментальной областью действия полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ на sh-конусе Csh_i. $\square$

Утверждение 14. *(i) Фундаментальной областью действия полугруппы вершин старшеграни Δ_i на sh-полугруппе Ash_i является конечное подмножество Bsh_i множества Ash_i, определяемое двойными неравенствами:*

$$Bsh_i = \{n \in Ash_i : \left\{\begin{array}{l} 0 < c_1(n) \leq 1 \\ 0 < c_2(n) \leq 1 \\ \ldots \\ 0 < c_r(n) \leq 1 \\ 0 \leq c_{r+1}(n) < 1 \\ 0 \leq c_{r+2}(n) < 1 \\ \ldots \\ 0 \leq c_d(n) \quad < 1 \end{array}\right. \} \tag{38}$$

то есть просто множество целых точек полу-открытого параллелепипеда Π_i.
(ii) Число целых точек в полу-открытым параллелепипеде Π_i равно его объему:

$$\# Bsh_i = Volume(\Pi_i) \tag{39}$$

Доказательство. (i) Из утверждения 12 следует, что произвольная точка $p \in Ash_i$ однозначно представляется в виде суммы $p = b + g$, где $g \in V(\Delta_i)$. И сама эта точка и второе слагаемое суммы имеют целые y-координаты. Значит и первое слагаемое b этой суммы имеет целые y-координаты, то есть принадлежит Ash_i и удовлетворяет неравенствам (38). Значит мы однозначно представили произвольную точку $p \in Ash_i$ в виде сдвига точки b из Bsh_i на вектор g из $V(\Delta_i)$. Иными словами, мы доказали, что

$$Ash_i = \bigcup_{g \in V(\Delta)} (Bsh_i \oplus g) \tag{40}$$

(ii) вытекает из утверждения 11. $\square$

Определение 6. *Для $i > 1$ назовем множество Bsh_i* ***базисом*** *sh-полугруппы Ash_i. Базис sh-полугруппы Ash_1 совпадает с ранее определенным формулой (22) базисом $B(\Delta_1)$.*

Тот факт, что множество Bsh_i является фундаментальной областью действия полугруппы $V(\Delta_i)$ на множестве Ash_i целых точек sh-конуса Csh_i, очевидно может быть переформулирован следующим образом.

Утверждение 15. *Сдвиги множества $V(\Delta_i)$ на элементы множества Bsh_i, по определению совпадающие с орбитами точек множества Bsh_i под действием полугруппы $V(\Gamma)$, попарно не пересекаются и объединение этих орбит дает Ash_i, то есть:*

$$Ash_i = \bigcup_{b \in Bsh_i} V(\Delta_i) \oplus b \tag{41}$$

Утверждение 15, в свою очередь, может быть переформулировано в терминах конечной порожденности модуля $\mathbb{K}[Ash_i]$. Заметим, что для $i > 1$ подполугруппа Ash_i не имеет нейтрального элемента, и потому умножение в $\mathbb{K}$-алгебре $\mathbb{K}[Ash_i]$ не будет иметь нейтрального элемента. Однако в данной статье нам потребуется умножать элементы $\mathbb{K}$-алгебры $\mathbb{K}[Ash_i]$ только на элементы $\mathbb{K}$-алгебры $\mathbb{K}[V(\Delta_i)]$, поэтому мы будем рассматривать $\mathbb{K}[Ash_i]$ исключительно как модуль над $\mathbb{K}[V(\Delta_i)]$, но не как самостоятельную $\mathbb{K}$-алгебру без единицы.

Утверждение 16. *Как модуль над алгеброй $\mathbb{K}[V(\Delta_i)]$ алгебра $\mathbb{K}[Ash_i]$ свободно порождена мономами, отвечающими точкам множества Bsh_i.*

Доказательство. Проводится аналогично доказательству утверждения 9 с использованием утверждения 14 вместо утверждения 8.

Утверждение 17. *(a) Только одно из множеств $Bsh_1, Bsh_2, \ldots, Bsh_N$, а именно, множество Bsh_1, содержит начало координат.*
(b) Для любой точки p любого из множеств $Bsh_1, Bsh_2, \ldots, Bsh_N$ сумма c-координат точки p не превосходит d.
(c) Только одно из множеств $Bsh_1, Bsh_2, \ldots, Bsh_N$, а именно, множество

Bsh_N, содержит точку, у которой сумма c-координат равна d и такая точка единственна.
(d) Ньютонова степень любой точки множества

$$\mathbb{B}^{sh} = Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_N$$

не превосходит dM, в этом множестве есть ровно один элемент ньютоновской степени 0 и ровно один элемент максимальной ньютоновской степени dM.

Доказательство. (a) и (b) очевидно вытекают из задания Bsh_i двойными неравенствами на c-координаты (38). Доказательство (c) вытекает из определения Bsh_i и того факта, что только последняя грань шеллинга $sh = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N)$ пересекается с объединением предыдущих граней по всем своим подграням коразмерности один.
(d) вытекает из (a)–(c) и того факта, что ньютоновская степень любой вершины многогранника Γ равна M и потому ньютоновская степень любой точки p замкнутого конуса любой старшеграни, выражается через c-координаты точки на этом конусе формулой

$$\varphi(p) = M \times (c_1(p) + c_2(p) + \ldots + c_N(p))$$

так что $\varphi(p) \leq dM$ для любого $p \in \mathbb{B}^{sh}$. $\square$

2.5. Шеллинг-расширения сверх-удобного многогранника Ньютона

Пусть Δ старшегрань с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_d$. Обозначим через $Pyramid(\Delta)$ замкнутую пирамиду с вершиной начало координат и основанием старшегрань Δ, то есть объединение всех замкнутых отрезков, начинающихся в начале координат, и заканчивающихся в какой-то точке старшеграни Δ.

Будем обозначать замыкание множества $X \in \mathbb{R}^d$ через $Closure(X)$. Очевидно, что

$$d! \times Volume(Pyramid(\Delta)) = Volume(Closure(\Pi(\Delta))) = abs(det(v_1, v_2, \ldots, v_d))$$

Из очевидного факта $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} Pyramid(\Delta_i)$ вытекает, что

$$d! \times Volume(\Gamma) = \sum_{i=1}^{N} d! \times Volume(Pyramid(\Delta_i)) = \sum_{i=1}^{N} Volume(Closure(\Pi(\Delta_i))) \tag{42}$$

Учитывая, что разность $Closure(\Pi_i) \setminus \Pi_i$ имеет нулевой d-мерный объем, сумму объемов в правой части (42) можно заменить на объем дизъюнктного объединения полуоткрытых параллелепипедов

$$d! \times Volume(\Gamma) = Volume(\bigcup_{i=1}^{N} \Pi_i) \tag{43}$$

Это дизъюнктное объединение строится по сверх-удобному симплициальному многограннику Ньютона и его шеллингу и заслуживает отдельного рассмотрения.

Определение 7. *Для заданного шеллинга sh выпуклого сверх-удобного симплициального многогранника Ньютона Γ* ***шеллинг-расширением*** *назовем объединение полуоткрытых параллелепипедов всех sh-старшеграней Γ, то есть положим*

$$\Gamma^{sh} = \bigcup_{i=1}^{N} \Pi(\Delta_i^{sh}) \tag{44}$$

Базисом шеллинг-расширения Γ^{sh} назовем объединение базисов sh-полугрупп, то есть положим

$$\mathbb{B}^{sh} = \bigcup_{i=1}^{N} Bsh_i \tag{45}$$

Определение 8. *Введем характеристику выпуклого многогранника $P \in \mathbb{R}^d$*

$$\mu(P) = d! \times Volume(P)$$

Утверждение 18. *Шеллинг-расширение Γ^{sh} сверх-удобного симплициального целочисленного многогранника Ньютона Γ обладает следующими свойствами*
(i) Шеллинг-расширение многогранника Ньютона Γ содержит $interior(\Gamma)$.
(ii) Базис шеллинг-расширения $\mathbb{B}^{sh}$ совпадает со множеством целых точек множества Γ^{sh}.
(iii) число целых точек в любом шеллинг-расширении многогранника Γ не зависит от шеллинга sh и равно $\mu(\Gamma)$, то есть

$$\#(Z^d \cap \Gamma^{sh}) = Volume(\Gamma^{sh}) = d! \times Volume(\Gamma) = \mu(\Gamma)$$

Доказательство. (i) вытекает из (15) и (33), (ii) вытекает из (39) и (42).
Докажем (iii). Из утверждений 8 и 18 вытекает, что

$$\begin{aligned} \#\mathbb{B}^{sh} &= (\#Bsh_1 + \#Bsh_2 + \ldots + \#Bsh_N) \\ &= (Volume(\Pi_1) + \ldots + Volume(\Pi_N)) \\ &= d! \times Volume(\Gamma) \\ &= \mu(\Gamma) \end{aligned} \tag{46}$$

3. Комбинаторная задача, решение которой приводит к построению мономиального базиса

В этом разделе неформально изложен новый подход к решению комбинаторной задачи подсчета числа целых точек на границе сверх-удобного целочисленного многогранника Γ и различных рациональных растяжениях этой границы. Эта задача близка к задачам изучения h-векторов симплициальных комплексов и уравнений Дэна-Соммервилля и к задаче изучения полиномов Эрхарта. Задача исследовалась в работе автора [4] и в работах [24], [25], [26], [27].

3.1. Ньютоновская степень

Фиксировав сверх-удобный целочисленный многогранник $\Gamma \in \mathbb{R}^d$, не обязательно симплициальный, мы, следуя В.И.Арнольду, можем определить так называемую ньютоновскую ("ломаную") степень любой точки в $\mathbb{R}^d$ [1]. Эта степень φ неотрицательна, линейно однородна на конусе каждой старшеграни многогранника, принимает в любой точке $\mathbb{Z}^d$ неотрицательное целое значение и на границе многогранника Γ, в частности, на всех его вершинах, принимает некоторое положительное целое значение M. Ньютоновской степенью монома $x^n = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_d^{n_d}$ мы будем называть число $\varphi(n)$, где $n = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$.

3.1.1. Задание выпуклого сверх-удобного многогранника неотрицательной кусочно-линейной функцией

Известно, см. например [23, Theorem 1.1], что компактный выпуклый d-мерный многогранник $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, имеющий N старшеграней, можно задать как пересечение N полупространств, граница каждого из которых пересекается с многогранником по одной из старшеграней Δ_i. Если известно, что многогранник Γ сверх-удобный, то каждое из таких полупространств можно задать на $\mathbb{R}^d$ неравенством $\varphi_i(x) \le 1$, где φ_i - линейная функция, которая

$$\begin{array}{l}\textit{на многограннике } \Gamma \textit{ принимает значения,}\\ \textit{не превосходящие 1, причем значение 1}\\ \textit{принимается только на старшеграни } \Delta_i\end{array}\qquad(47)$$

Определим кусочно-линейную функцию $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi(x) = \max_{i=1}^{N} \varphi_i(x)$$

На $\mathbb{R}^d$ эта функция будет принимать только неотрицательные значения, будет обращаться в 0 только в начале координат, многогранник Γ будет задаваться неравенством $\varphi(x) \le 1$, а его граница $\partial\Gamma$ будет задаваться равенством $\varphi(x) = 1$. Ни симплициальность, ни целочисленность многогранника в определении этой функции φ не использовались.

Напомним, что для сверх-удобного многогранника Γ конусом $Cone(\Delta)$ старшеграни Δ мы называем объединение всех замкнутых лучей, каждый из которых исходит из начала координат и проходит через некоторую точку старшеграни Δ.

Утверждение 19. *Функция φ обладает следующими свойствами:*

(a) φ положительно однородна степени 1, т.е. $\forall x \in R^d \quad \forall\lambda \ge 0 \quad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;

(b) точка x принадлежит конусу $Cone(\Delta_i)$ некоторой старшеграни Δ_i если и только если $\varphi(x) = \varphi_i(x)$.

(c) функция φ субаддитивна, то есть при $s \ge 2$ и $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi(x_1 + \dots + x_s) \le \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_s)$$

причем равенство достигается если и только если существует такая старшегрань Δ_i, что точки $x_1, x_2, \dots, x_s$ одновременно принадлежат конусу этой старшеграни Δ_i.

(d) на каждом конусе $Cone(\Delta_i)$ функция φ аддитивна, то есть при $s \ge 2$ и $x_1, \dots, x_s \in Cone(\Delta_i)$

$$\varphi(x_1 + x_2 + \dots + x_s) = \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_s)$$

Доказательство. (a) очевидно. (b) вытекает из (a), определения конуса старшеграни и свойства (47) функций φ_i. Докажем (c). Пусть $X = x_1 + x_2 + \dots + x_s$. Конуса старшеграней покрывают пространство $\mathbb{R}^d$ (см. формулу (12)). Потому точка X принадлежит конусу по меньшей мере одной старшеграни многогранника. Выберем одну из таких старшеграней Δ_i. Согласно (b),

$$\begin{aligned}&\varphi(X) = \varphi_i(X) =\\ &\varphi_i(x_1) + \varphi_i(x_2) + \dots + \varphi_i(x_s) \le\\ &\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_s)\end{aligned}$$

что доказывает нестрогое неравенство. Выясним, при каких условиях это неравенство обращается в равенство. Поскольку

$$\varphi_i(x_1) \leq \varphi(x_1), \ldots, \varphi_i(x_s) \leq \varphi(x_s)$$

равенство достигается если и только если

$$\varphi_i(x_1) = \varphi(x_1), \ldots, \varphi_i(x_s) = \varphi(x_s)$$

Согласно (b), эти равенства выполняются одновременно если и только если

$$x_1 \in Cone(\Delta_i), \ldots, x_s \in Cone(\Delta_i)$$

Таким образом, равенство достигается если и только если $x_1, x_2, \ldots, x_s$ одновременно принадлежат конусу некоторой старшеграни Δ_i. Наконец, (d) вытекает из (c). □

Из целочисленности многогранника Γ вытекает, то коэффициенты всех линейных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ будут рациональными числами. Поэтому существует натуральное число M, такое, что после умножения функции φ на M, мы получим новую функцию, которую мы всюду ниже будем обозначать той же буквой φ, принимающую в целых точках $\mathbb{R}^d$ только целые значения, а на границе многогранника Γ принимающую значение M. Назовем эту функцию *ньютоновской степенью.*

3.2. Ньютоновские производящие функции подмножеств $\mathbb{Z}^d$

Ньютоновская степень, построенная по сверх-удобному многограннику Γ, задает отображение счетного множества $\mathbb{Z}^d$ в множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}$. Прообраз каждой точки при этом отображении конечен. Поэтому для любого подмножества $Y \subset \mathbb{Z}^d$ корректно определена формальная сумма

$$H_\Gamma(Y,t) = \sum_{n \in Y} t^{\varphi(n)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i t^i \qquad (48)$$

которую мы назовем ньютоновской производящей функцией множества Y, ассоциированной со сверх-удобным многогранником Γ.

Утверждение 20. *(a) Если множество $Y \subset Z^d$ конечно, то его ньютоновская производящая функция является многочленом и мощность множества Y равна значению этого многочлена в точке 1:*

$$\#Y = H_\Gamma(Y,1) = \sum_{n \in Y} 1^{\varphi(n)}$$

(b) Если множество $Y \subset \mathbb{Z}^d$ есть объединение конечного или счетного числа попарно непересекающихся подмножеств

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots$$

то

$$H_\Gamma(Y,t) = H_\Gamma(Y_1,t) + H_\Gamma(Y_2,t) + \ldots$$

Доказательства очевидны. □

Ниже мы будем рассматривать ньютоновские производящие функции различных подмножеств Z^d, введенных в разделах 2.3. и 2.4..

Определение 9. *Для $i \in [1,N]$ обозначим через $q_i(t)$ ньютоновскую производящую функцию конечного множества Bsh_i, определенного формулой (38). Обозначим через $Q(t)$ ньютоновскую производящую функцию конечного множества*

$$\mathbb{B}^{sh} = Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_N$$

Очевидно, что многочлен $Q(t) = q_1(t) + q_2(t) + \ldots + q_N(t)$ и многочлены $q_i(t)$ для $i \in [1,N]$ имеют неотрицательные целые коэффициенты. Из определения производящей функции конечного множества следует, что $\#Bsh_i = q_i(1)$ и $\#\mathbb{B}^{sh} = Q(1)$, из формул (39) и (46) вытекает, что

$$q_i(1) = \#Bsh_i = Volume(\Pi_i)$$
$$Q(1) = \#\mathbb{B}^{sh} = \mu(\Gamma)$$

Из утверждения 17 вытекает, что многочлен $Q(t)$ имеет степень dM и имеет вид $Q(t) = 1 + \ldots + t^{dM}$.

Утверждение 21. *Пусть sh – шеллинг сверх-удобного симплициального многогранника Γ, Δ_i - одна из старшеграней шеллинга.*
(a) Ньютоновская производящая функция полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ дается формулой

$$H_\Gamma(V(\Delta),t) = \frac{1}{(1-t^M)^d}$$

(b) Ньютоновская производящая функция sh-полугруппы Ash_i является произведением производящей функции полугруппы вершин старшеграни Δ_i и производящей функции базиса Bsh_i:

$$H_\Gamma(Ash_i,t) = H_\Gamma(V(\Delta),t) \times H_\Gamma(Bsh_i,t) = \frac{q_i(t)}{(1-t^M)^d}$$

(c) Ньютоновская производящая функция множества $\mathbb{Z}^d$ дается формулой

$$H_\Gamma(\mathbb{Z}^d,t) = \frac{Q(t)}{(1-t^M)^d}, \qquad (49)$$
где $Q(t) = q_1(t) + \ldots + q_N(t)$

(d)

$$deg(Q(t)) = dM,\ Q(1) = \mu(\Gamma)$$

Доказательство утверждения (a) будет приведено ниже в разделе 3.3.. Доказательства утверждений (b)-(c) будут приведены ниже в разделе 3.4.. Доказательство утверждения (d) вытекает из формул (39) и (46) и утверждения 17.

Ряд $H_\Gamma(\mathbb{Z}^d, t)$ доставляет комбинаторную информацию о расположении многогранника Γ относительно множества $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$. Например, коэффициент при t^M в ряду $H_\Gamma(\mathbb{Z}^d, t)$ равен числу целых точек на границе многогранника Γ, а коэффициент при t^{kM} равен числу целых точек на границе многогранника Γ, растянутого в k раз.

В работах автора 1974-75 гг. [2], [4] комбинаторно доказывался достаточно простой факт о том, ряд $H_\Gamma(\mathbb{Z}^d, t)$ имеет вид $\frac{Q(t)}{(1-t^M)^d}$, где $Q(t)$ многочлен, сумма коэффициентов которого равна $\mu(\Gamma) = d! \times Volume(\Gamma)$. Более сложный факт неотрицательности коэффициентов этого многочлена в статье [4] не сформулирован, хотя и может быть выведен из приведенных в этой статье алгебраических рассуждений. Оказывается, что для симплициального многогранника Ньютона неотрицательность и целочисленность коэффициентов числителя $Q(t)$ рассматриваемой ньютоновской производящей функции может быть доказана комбинаторно с помощью *шеллинга* комплекса граничных граней многогранника Ньютона, описанного в разделе 1. При решении задачи явного описания ньютоновской производящей функции $H_\Gamma(\mathbb{Z}^d, t)$ с помощью шеллинга и возникает естественно то множество степеней мономов $\mathbb{B}^{sh}$, которое дает мономиальный базис фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \dots, g_d)$ для полиномов Лорана общего положения, имеющих один и тот же многогранник Ньютона Γ.

С помощью шеллинга мы также доказываем следующее усиление утверждения 21

Утверждение 22. *Для выпуклого сверх-удобного симплициального многогранника* Γ *многочлен* $Q(t)$ *в числителе дроби* $\frac{Q(t)}{(1-t^M)^d}$ *(формула (49)), является возвратным многочленом степени* dM*, то есть*

$$Q(t) = t^{dM} Q(1/t) \tag{50}$$

Доказательство будет приведено ниже в разделе 3.5. Утверждение 22 может рассматриваться как аналог свойства Дэна-Соммервилля h-вектора комплекса граней выпуклого симплициального многогранника. Это утверждение известно, например, оно сформулировано в [26, Proposition 2.6]. По сообщению Алана Стэплдона, это утверждение, как частный случай более общего утверждения 2.12, доказано в работе [27] тремя разными способами, ни один из которых не использует существование шеллинга. Однако, известные автору опубликованные доказательства, см. например [24], шеллинг не используют и потому отличаются от приведенного нами ниже доказательства, существенно использующего существование и обратимость шеллинга выпуклого симплициального многогранника.

Требование симплициальности сверх-удобного (а значит целочисленного) выпуклого многогранника Γ в условии утверждения 22 может быть опущено, поскольку легко доказать, что граница любого выпуклого многогранника без добавления новых вершин может быть подразбита на симплексы таким образом, что полученный симплициальный комплекс будет допускать шеллинг.

3.3. Градуированные линейные пространства и их ряды Пуанкаре

Приведенные ниже определения 10 и 11 взяты из Википедии, однако вместо термина *ряд Гильберта-Пуанкаре* мы используем термин *ряд Пуанкаре.* Мы будем использовать определенные формулой (48) ньютоновские производящие функции различных подмножеств группы Z^d. Эти комбинаторно определенные производящие функции окажутся рядами Пуанкаре различных градуированных K-алгебр в смысле определения 11.

Определение 10. *Пусть* $\mathbb{N}$ *- множество неотрицательных целых чисел,* X *- линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.* $\mathbb{N}$*-**градуировкой*** X *называется представление* X *в виде прямой суммы конечномерных линейных пространств:* $X = X_0 \oplus X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus \dots$ *Такое пространство* X *называется* $\mathbb{N}$*-**градуированным** (градуированным неотрицательными целыми числами). Элемент* x*, принадлежащий пространству* X_i $(i \in \mathbb{N})$ *называют однородным элементом степени* i*. Согласно определению прямой суммы, любой элемент пространства* X *есть сумма конечного числа однородных элементов.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только $\mathbb{N}$-градуировки. Поэтому будем использовать термины **градуировка** и **градуированный**, не указывая явно $\mathbb{N}$.

Определение 11. *Рядом Пуанкаре градуированного линейного пространства* $X = X_0 \oplus X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots$ *называется формальный ряд от одной независимой переменной с неотрицательными целыми коэффициентами:*

$$H(X,t) = \\ dim(X_0) + dim(X_1)\, t + dim(X_2)\, t^2 + \ldots \tag{51}$$

Часто этот ряд может быть свернут в рациональную функции от t. Предположим, что в пространстве X задан однородный базис. Будем говорить, что каждый элемент этого базиса степени i, *дает вклад* $1 \cdot t^i$ в ряд Пуанкаре $H(X,t)$. Тогда сумма вкладов всех элементов базиса даст ряд Пуанкаре X. Предположим, что однородный базис представлен как дизъюнктное объединение нескольких множеств. Тогда мы можем подсчитать вклады в ряд Пуанкаре каждого из этих множеств и сумма этих вкладов даст ряд Пуанкаре X.

Замечание. Частным случаем этого утверждения является свойство аддитивности ньютоновских производящих функций, сформулированное в утверждении 20.

Пример 1. $X = \mathbb{K}[x, x^{-1}]$ - алгебра многочленов Лорана от одной переменной. Введем на X $\mathbb{N}$-градуировку, положив $X_0 = \mathbb{K}$ и $X_i =$ линейная оболочка мономов x^i и x^{-i} при $i > 0$. Тогда вклад в ряд Пуанкаре от мономов неотрицательной степени будет равен $1 + t + t^2 + t^3 + \ldots = \frac{1}{1-t}$, а вклад от мономов отрицательной степени будет равен $t + t^2 + t^3 + \ldots = \frac{t}{1-t}$. Эти два множества базисных мономов являются разбиением множества базисных векторов и ряд Пуанкаре всей алгебры может быть представлен как сумма двух рациональных функций

$$\frac{1}{1-t} + \frac{t}{1-t} = \frac{1+t}{1-t} = 1 + 2t + 2t^2 + 3t^3 + \ldots$$

Пример 2. $X = \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Каждый многочлен от переменных x_1, x_2 можно представить как линейную комбинацию мономов $x_1^{n_1} x_2^{n_2}$. Степенью такого монома будем считать полную степень $n_1 + n_2$. Раскроем скобки в формальном выражении:

$$(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \ldots)(1 + x_2 + x_2^2 + x_2^3 + \ldots)$$

Каждый моном от x_1, x_2 входит в получившееся выражение ровно один раз. Чтобы подсчитать количество мономов степени d, заменим в этом выражении x_1 и x_2 на t и приведем подобные члены. Коэффициент при t^d и будет равен количеству мономов в X степени d. Значит,

$$H(X,t) = (1+t+t^2+\ldots)(1+t+t^2+\ldots) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

В общем случае, если мы градуируем многочлены от d переменных по полной степени, то получаем

$$H(\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_d],\ t) = \frac{1}{(1-t)^d} \tag{52}$$

В случае, когда каждой переменной присвоена степень M, ряд Пуанкаре приобретает вид

$$H(\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_d],\ t) = \frac{1}{(1-t^M)^d} \tag{53}$$

Доказательство утверждения 21(a). Градуированная полугрупповая $\mathbb{K}$-алгебра $\mathbb{K}[V(\Delta)]$ любой старшеграни Δ свободно порождена d мономами $x^{v_1}, x^{v_2}, \ldots, x^{v_N}$, где $v_1, v_2, \ldots, v_d$ - вершины старшеграни. Поскольку ньютонова степень каждой вершины многогранника равна M, применима формула (53).

Пример 3. Фиксируем в $\mathbb{R}^d$ сверх-удобный целочисленный многогранник Г. В разделе 3.1. показано, что такой многогранник определяет ньютоновскую степень $\varphi(n)$ любого монома x^n в линейном пространстве X многочленов Лорана от d переменных. Определим X_i как множество линейных комбинаций мономов, ньютоновской степени i. Тем самым в линейном пространстве многочленов Лорана возникает $\mathbb{N}$-градуировка. Ряд Пуанкаре этого градуированного линейного пространства, подсчитанный по общему определению (51), тождественен ньютоновской производящей функции множества $\mathbb{Z}^d$, определенной формулой (48).

Ниже будет показано, что построенная ньютоновская градуировка линейного пространства многочленов Лорана задает исчерпывающую возрастающую фильтрацию в кольце ($\mathbb{K}$-алгебре) многочленов Лорана и градуировку в ассоциированном градуированном кольце, построенном по этой фильтрации.

3.4. Вычисление ньютоновской производящей функции $H_\Gamma(\mathbb{Z}^d, t)$, путем двухэтапного разбиения группы $\mathbb{Z}^d$ на непересекающиеся подмножества

3.4.1. Этап 1. Разбиение группы $\mathbb{Z}^d$ на sh-полугруппы старшеграней многогранника Ньютона, снабженного шеллингом sh.

Этот этап, проведенный в разделе 2.3., позволяет свести задачу вычисления ньютоновской производящей функции всего множества $\mathbb{Z}^d$ к задаче вычисления производящих функций sh-полугрупп. Решение задачи вычисления ньютоновский производящих функций sh-полугрупп облегчается тем, что на замкнутом конусе любой старшеграни ньютоновская степень аддитивна.

Согласно утверждению 3 раздела 2.3. группа $\mathbb{Z}^d$ разбивается на sh-полугруппы. Для удобства читателя воспроизведем формулу (16) этого разбиения:

$$\mathbb{Z}^d = Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_N$$

Из этой формулы, согласно утверждению 20(b), получаем

$$H_\Gamma(\mathbb{Z}^d, t) = H_\Gamma(Ash_1, t) + \cdots + H_\Gamma(Ash_N, t) \tag{54}$$

На втором этапе, для нахождения слагаемых $H_\Gamma(Ash_i, t)$ этой суммы (54) нужно подразбить каждое счетное множество Ash_i целых точек sh-конуса Csh_i на конечное число непересекающихся орбит, стартующих в точках конечного множества Bsh_i - базиса sh-полугруппы Ash_i.

3.4.2. Этап 2. Разбиение множества целых точек sh-конуса на орбиты действия полугруппы вершин

Доказательство утверждения 21(b). Для вычисления ньютоновской производящей функции $H_\Gamma(Ash_i, t)$ множества целых точек $Ash_i \subset Csh_i$ заметим, что согласно утверждению 21(a) раздела 3.2., ньютоновская производящая функция полугруппы вершин старшеграни Δ_i равна $\frac{1}{(1-t^M)^d}$. В утверждении 14 доказано, что существует **базис полугруппы** Ash_i - конечное множество целых точек $Bsh_i \subset Ash_i$ такое, что все множество Ash_i целых точек sh-конуса Csh_i замащивается орбитами точек этого конечного множества Bsh_i под действием полугруппы вершин $V(\Delta_i)$. Ньютоновскую производящую функцию этого множества мы обозначили $q_i(t)$ и доказали, что $q(1) = Volume(\Pi)$. Заметим, что и полугруппа вершин $V(\Delta_i)$ и множество Ash_i принадлежат замкнутому конусу $Cone(\Delta_i)$, а на этом конусе ньютоновская степень аддитивна, поэтому ньютоновская степень любой целой точки $b \in Ash_i$ при сдвиге на любой элемент g полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ увеличивается на ньютоновскую степень $\varphi(g)$ этого элемента:

$$\varphi(b+g) = \varphi(b) + \varphi(g)$$

Поэтому орбита любой целой точки $b \in Bsh_i$ под действием полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ дает вклад в ряд Пуанкаре, равный

$$\sum_{g \in V(\Delta_i)} t^{\varphi(b+g)} = t^{\varphi(b)} \times \sum_{g \in V(\Delta_i))} t^{\varphi(g)} =$$

$$t^{\varphi(b)} H_\Gamma(V(\Delta_i), t) = \frac{t^{\varphi(b)})}{(1-t^M)^d}$$

А поскольку орбиты всех точек конечного множества Вsh_i не пересекаются и их объединение дает все множество целых точек sh-конуса Csh_i, получается, что

$$H_\Gamma(Ash_i, t) = \frac{1}{(1-t^M)^d} \sum_{b \in Bsh_i} t^{\varphi(b)} = \frac{q_i(t)}{(1-t^M)^d}$$

$$\text{где } q_i(t) = H_\Gamma(Bsh_i, t) \quad \square \tag{55}$$

Доказательство утверждения 21(c). Подставляя полученное в предыдущей формуле выражение для $H_\Gamma(Ash_i, t)$ в формулу (54) получаем

$$H_\Gamma(\mathbb{Z}^d, t) =$$

$$\frac{q_1(t) + q_2(t) + \cdots + q_N(t)}{(1-t^M)^d} = \frac{Q(t)}{(1-t^M)^d} \quad \square \tag{56}$$

3.5. Свойство Дэна-Соммервилля ньютоновской производящей функции

Набросок доказательства утверждения 22. Пусть Γ - симплициальный суперудобный многогранник, sh - шеллинг Γ и $\overline{sh}$ - обратный шеллинг в смысле раздела 1. Мы должны доказать справедливость тождества

$$Q(t) = t^{dM} \times Q(1/t)$$

В разделе 2.3. по шеллингу sh мы индуктивно построили

- открыто-замкнутые конуса
  $Csh_1, Csh_2, \ldots, Csh_N$,
- фундаментальные области
  $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_N$,
- конечные множества целых точек

$Bsh_1, Bsh_2, \ldots, Bsh_N$ и
- многочлены $q_1, q_2, \ldots, q_N$.

Построим аналогично по обратному шеллингу $\overline{sh}$
- открыто-замкнутые конуса $\overline{Csh_N}, \overline{Csh_{N-1}}, \ldots, \overline{Csh_1}$,
- фундаментальные области $\overline{\Pi_N}, \overline{\Pi_{N-1}}, \ldots, \overline{\Pi_1}$,
- конечные множества целых точек $\overline{Bsh_N}, \overline{Bsh_{N-1}}, \ldots, \overline{Bsh_1}$ и
- многочлены $\overline{q_N}, \overline{q_{N-1}}, \ldots, \overline{q_1}$.

Для доказательства тождества (3.5.) сравним множества Π_i и $\overline{\Pi_i}$. Из определения шеллинга и утверждения 2 раздела 2. легко вывести, что целочисленные полу-открытые параллелепипеды Π_i и $\overline{\Pi_i}$ в некотором смысле дополнительны. А именно, если

$$\Pi_i = (0, v_1] \oplus (0, v_2] \oplus \cdots \oplus (0, v_r] \oplus [0, v_{r+1}) \oplus \cdots \oplus [0, v_d)$$

то

$$\overline{\Pi_i} = [0, v_1) \oplus [0, v_2) \oplus \cdots \oplus [0, v_r) \oplus (0, v_{r+1}] \oplus \cdots \oplus (0, v_d]$$

Для компактности будем обозначать замыкание множества $X \in \mathbb{R}^d$ использованием полужирного шрифта: $Closure(X) = \mathbf{X}$. Замыкание $\mathbf{\Pi}_i$ фундаментальной области Π_i может быть представлено как сумма Минковского замкнутых интервалов:

$$\mathbf{\Pi}_i = [0, v_1] \oplus \cdots \oplus [0, v_r] \oplus [0, v_{r+1}] \oplus \cdots \oplus [0, v_d]$$

Замыкания полу-открытых параллелепипедов Π_i и $\overline{\Pi_i}$ совпадают с $\mathbf{\Pi}_i$. Положим $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_d$. Легко видеть, что замкнутый параллелепипед $\mathbf{\Pi}_i$ центрально симметричен относительно точки $v/2$. Центральная симметрия $\sigma : \mathbf{\Pi}_i \to \mathbf{\Pi}_i$ может быть задана формулой $\sigma(b) = v - b$. Эта симметрия является инверсией множества $\mathbf{\Pi}_i$, которая переводит множество $\mathbb{Z}^d \cap \mathbf{\Pi}_i$ в себя. Так определенная инверсия задает биективное соответствие между полу-открытыми параллелепипедами Π_i и $\overline{\Pi_i}$, а также между множествами их целых точек Bsh_i и $\overline{Bsh_i}$.

Ввиду аддитивности ньютоновской степени на конусе $Cone(\Delta_i)$ для любой точки $b \in \Pi_i$ выполнено равенство $\varphi(\sigma(b)) = dM - \varphi(b)$. Проверим, что $\overline{q_i}(t) = t^{dM} q(1/t)$. Действительно:

$$\overline{q_i}(t) = \sum_{\overline{b} \in \overline{Bsh_i}} t^{\varphi(\overline{b})} = \sum_{b \in Bsh_i} t^{\varphi(\sigma(b))} = \sum_{b \in Bsh_i} t^{dM - \varphi(b)} = t^{dM} \sum_{b \in Bsh_i} (1/t)^{\varphi(b)} = t^{dM} q_i(1/t)$$

Ньютоновская производящая функция $H_\Gamma(\mathbb{Z}^d, t)$, определяемая формулой (56) определяется конструкцией, в которой шеллинг не участвует и от выбора шеллинга не зависит. Значит не зависит от шеллинга и числитель этой производящей функции, который может быть вычислен по формуле

$$Q(t) = (1 - t^M)^d H_\Gamma(t),$$

При вычислении с помощью шеллинга sh числитель $Q(t)$ ньютоновской производящей функции оказывается равным сумме

$$q_1(t) + q_2(t) + \cdots + q_N(t)$$

А при вычислении с помощью шеллинга $\overline{sh}$ числитель $Q(t)$ ньютоновской производящей функции оказывается равным сумме

$$\overline{q_1}(t) + \overline{q_2}(t) + \cdots + \overline{q_N}(t)$$

Поэтому, используя (50), получаем искомое тождество

$$\begin{aligned} Q(t) =& q_1(t) + q_2(t) + \cdots + q_N(t) \\ =& \overline{q_1}(t) + \overline{q_2}(t) + \cdots + \overline{q_N}(t) \\ =& t^{dM}(q_1(1/t) + q_2(1/t) + \cdots + q_N(1/t)) \\ =& t^{dM} Q(1/t) \qquad \square \end{aligned}$$

4. Стандартные сведения о фильтрованных и градуированных объектах, их рядах Пуанкаре и конечно порожденных градуированных алгебрах

В этом разделе напоминаются известные определения и утверждения, относящиеся к фильтрованным и градуированным объектам и конечно порожденным градуированным алгебрам. В нашей статье мы рассматриваем только конечно-порожденные $\mathbb{K}$-алгебры над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0, градуированные неотрицательными целыми числами.

Определение 12. *Размерностью конечно-порожденной градуированной $\mathbb{K}$-алгебры X назовем кратность полюса $t = 1$ ее ряда Пуанкаре $H(X, t)$.*

Замечание. Согласно формуле (52) ряд Пуанкаре $\mathbb{K}$-алгебры многочленов от d переменных, градуированных полной степенью, имеет в точке 1 полюс порядка d и согласно определению выше имеет размерность d.

В [29] можно найти доказательства следующих двух утверждений

Теорема 1. *Пусть X - конечно порожденная градуированная $\mathbb{K}$-алгебра. Тогда $H(X,t)$ есть либо рациональная функция с единственным полюсом в точке $t=1$, либо многочлен.*

Утверждение 23. *Введенная в определении 12 размерность конечно-порожденной градуированной $\mathbb{K}$-алгебры совпадает с размерностью Крулля.*

4.1. Поэлементное сравнение рядов Пуанкаре градуированных алгебр

Мы воспроизведем рассуждения, приведенные в онлайн публикации Р. Стенли [11].

Пусть $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$ и $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots$ два формальных ряда с вещественными коэффициентами. Мы скажем, что $A(t) \le B(t)$, если $a_0 \le b_0$ и $a_1 \le b_1$ и $a_2 \le b_2$ и $a_3 \le b_3$ и т.д. Если ряд $C(t)$ имеет неотрицательные коэффициенты и $c_0 \ne 0$, то из $A(t) \le B(t)$ следует $A(t)C(t) \le B(t)C(t)$, причем $A(t)C(t) = B(t)C(t)$ если и только если $A(t) = B(t)$. Если для $A(t)$ и $B(t)$ одновременно выполнены неравенства $A(t) \le B(t)$ и $B(t) \le A(t)$, то $A(t) = B(t)$. Если R - градуированная алгебра и $g \in R$ однородный элемент степени M, не являющийся делителем нуля, то

$$H(R,t) = \frac{H(R/(g),t)}{1-t^M}$$

Для произвольного однородного элемента $g \in R$ положительной степени M выполнено соотношение

$$H(R,t) \le \frac{H(R/(g),t)}{1-t^M} \tag{57}$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда g не является делителем нуля в R.

Пусть $g_1, g_2, \dots, g_r$ последовательность элементов градуированной $\mathbb{K}$-алгебры R положительных степеней $M_1, M_2, \dots, M_r$. Итерируя неравенство (57), получаем

$$H(R,t) \le \frac{H(R/(g_1, g_2, \dots, g_r), t)}{(1-t^{M_1})(1-t^{M_2})\dots(1-t^{M_r})} \tag{58}$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда элемент g_1 не является делителем нуля в R, элемент g_2 не является делителем нуля в $R/(g_1)$, элемент g_3 не является делителем нуля в $R/(g_1, g_2)$, $\dots$, элемент g_r не является делителем нуля в $R/(g_1, g_2, \dots, g_{r-1})$.

4.2. Градуированные кольца Коэна-Маколея

В этом разделе мы перечислим ряд известных фактов. Для описания условий на последовательность элементов кольца, при которых неравенство (58) обращается в равенство, следующее определение вводит специальный термин.

Определение 13. *Последовательность элементов $g_1, g_2, \dots g_r$ коммутативного кольца R называется **регулярной**, если (i) идеал, порожденный всеми элементами последовательности, не совпадает с R, (ii) элемент g_1 не является делителем нуля в R, элемент g_2 не является делителем нуля в фактор-алгебре $R/(g_1)R$, элемент g_3 не является делителем нуля в фактор-алгебре $R/(g_1, g_2)R, \dots$, и, наконец, элемент g_r не является делителем нуля в фактор-алгебре $R/(g_1, g_2, \dots, g_{r-1})R$.*

Определение 14. *Конечно порожденное градуированное кольцо R ($\mathbb{K}$-алгебра) размерности d называется кольцом Коэна-Маколея, если существует регулярная последовательность, состоящая из d однородных элементов R положительных степеней.*

Следующие две теоремы описывают свойства градуированных колец Коэна-Маколея. Доказательства могут быть найдены в [30].

Теорема 2. *Если последовательность $g_1, g_2, \dots, g_d$ однородных элементов положительных степеней d-мерного градуированного кольца Коэна-Маколея R порождает идеал конечной коразмерности, то эта последовательность регулярна.*

Регулярность последовательности в градуированных кольцах Коэна-Маколея может быть проверена несколькими способами.

Теорема 3. *Пусть R - конечно порожденная градуированная $\mathbb{K}$-алгебра Коэна-Маколея размерности d; $g_1, g_2, \dots, g_d$ - последовательность однородных элементов R положительных степеней $M_1, M_2, \dots, M_d$; I - идеал в R, порожденный элементами* *этой последовательности;* $\mathbb{K}[g_1, g_2, \ldots, g_d]$ *- подагебра в R, порожденная элементами последовательности.*

а) Следующие условия эквивалентны:
(i) коразмерность идеала I конечна;
(ii) последовательность $g_1, g_2, \ldots, g_d$ *регулярна;*
(iii) $\mathbb{K}$*-алгебра R является свободным модулем с конечным числом однородных образующих над своей подалгеброй* $\mathbb{K}[g_1, g_2, \ldots, g_d]$*;*
(iv) ряд Пуанкаре $\mathbb{K}$*-алгебры R, профакторизованной по идеалу I, удовлетворяет соотношению*

$$H(R,t) = \frac{H(R/I,t)}{(1-t^{M_1})(1-t^{M_2})\ldots(1-t^{M_d})}$$

б) если выполнены условия части а), то формальный ряд H(R/I,t) фактически является многочленом с неотрицательными коффициентами, сумма этих коэффициентов равна коразмерности идеала I, а также равна числу образующих свободного модуля, определенного в (iii), причем любой однородный базис фактор-алгебры R/I может быть взят в качестве набора образующих свободного модуля из (iii) и любой минимальный набор образующих из (iii) может быть взят в качестве базиса фактор-алгебры R/I.

5. Фильтрация Ньютона кольца многочленов Лорана, структура ассоциированного градуированного кольца и кольца Стенли-Рейснера

5.1. Фильтрация Ньютона в кольце $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$

В работе [1] по многограннику Ньютона ростка аналитической функции от многих переменных В. Арнольд ввел в кольце ростков аналитических функций фильтрацию, которая была интенсивно использована в работах автора [2, 4]. Сегодня эту фильтрацию и аналогичные фильтрации, построенные по многограннику Ньютона многочлена или многочлена Лорана, называют фильтрациями Ньютона.

5.1.1. Ньютоновские степени мономов и их линейных комбинаций

В разделе 3.1. мы по сверх-удобному целочисленному многограннику Γ определили ньютоновскую степень $\varphi(n)$ любой точки $n \in \mathbb{Z}^d$. Это позволяет определить ньютоновские степени мономов. А именно, для $n \in \mathbb{Z}^d$ назовем $\varphi(n)$ *ньютоновской степенью* монома x^n. Поскольку предполагается, что многогранник Γ сверх-удобный, то есть начало координат является внутренней точкой Γ, для любого монома x^n его ньютоновская степень неотрицательна и равна нулю, если и только если моном x^n является *единичным.* В. Арнольд рассматривал ньютоновскую степень мономов в работе 1974 года [1] и называл ее *ломаной степенью.* Определим теперь ньютоновскую степень φ для любых ненулевых элементов $\mathbb{K}$-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$. Для непустой линейной комбинации мономов с ненулевыми коэффициентами $S = \sum_i \lambda_i m_i$ положим $\varphi(S) = \max_i \varphi(Log(m_i))$. Ньютоновскую степень нулевого элемента $\mathbb{K}$-алгебры положим равной $-\infty$.

5.1.2. Определение фильтрации Ньютона

Для краткости обозначим $\mathbb{K}$-алгебру многочленов Лорана $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$ через A. Операцию умножения в A будем обозначать через "$\cdot$". Для неотрицательного целого числа i положим $A_i = \{f \in A : \varphi(f) \leq i\}$. Линейные пространства A_i конечномерны, растут с ростом i: $\mathbb{K} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и их объединение равно алгебре A. В силу субаддитивности ньютоновской степени мономов, вытекающей из утверждения 19 раздела 3.1., эти линейные пространства в алгебре A относительно операции умножения "$\cdot$" удовлетворяют условию $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$.

Тем самым, в терминологии книги [31], эти линейные пространства задают в $\mathbb{K}$-алгебре многочленов Лорана A *целочисленную возрастающую исчерпывающую фильтрацию*, которую В. Арнольд в работе 1974 года [1] называл *фильтрацией Ньютона.*

5.2. Ассоциированное градуированное кольцо $\mathbb{A}(\Gamma)$ фильтрованного по Ньютону кольца A

Обозначим через $\mathbb{A}(\Gamma)$, для краткости просто через $\mathbb{A}$, ассоциированное градуированное кольцо фильтрованного по Арнольду-Ньютону кольца A. Напомним, что мы используем, как синонимы, термины $\mathbb{K}$-алгебра, алгебра и кольцо. Сначала введем в $\mathbb{A}$ структуру линейного пространства над $\mathbb{K}$. В соответствии с определением ассоциированного градуированного кольца [31] положим $\mathbb{A}_0 = A_0 = \mathbb{K}$, для натурального числа i определим линейное пространство $\mathbb{A}_i$ как фактор-пространство A_i/A_{i-1} и наконец, положим $\mathbb{A} = \bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{A}_i$. Сопоставив каждому моному x^n ньютоновской степени $\varphi(n)$ его класс эквивалентности $x^n + A_{\varphi(n)-1}$ мы получим множество, которое является базисом линейного пространства $\mathbb{A}$. Элементы этого базиса также будем называть мономами, то есть, допуская вольность речи, не будем различать мономы в A и их классы эквивалентности в $\mathbb{A}$, то есть будем одинаково обозначать мономы в фильтрованной и градуированной алгебрах. Обозначим операцию умножения в фильтрованной алгебре A через "$\cdot$" и операцию умножения в ассоциированной градуированной алгебре $\mathbb{A}$ через "$\circ$". Мы опишем наглядно эту операцию умножения "$\circ$" в ассоциированном градуированном кольце $\mathbb{A}$, указав, как вычисляется произведение классов эквивалентности двух или большего количества мономов.

5.2.1. Правило умножения мономов в ассоциированном градуированном кольце

Пусть x^{n_1} и x^{n_2} два монома в фильтрованной алгебре A ньютоновских степеней $d_1 = \varphi(n_1)$ и $d_2 = \varphi(n_2)$ соответственно. Их классы эквивалентности в A_{d_1}/A_{d_1-1} и A_{d_2}/A_{d_2-1} есть $x^{n_1} + A_{d_1-1}$ и $x^{n_2} + A_{d_2-1}$ соответственно. Согласно стандартному определению ассоциированного градуированного кольца

$$(x^{n_1} + A_{d_1-1}) \circ (x^{n_2} + A_{d_2-1}) = x^{n_1} \cdot x^{n_2} + A_{d_1+d_2-1} \in A_{d_1+d_2}/A_{d_1+d_2-1} \quad (59)$$

Формула (59) обобщается на случай произведения нескольких мономов

$$(x^{n_1} + A_{d_1-1}) \circ \ldots \circ (x^{n_s} + A_{d_s-1}) = x^{n_1} \cdot \ldots \cdot x^{n_s} + A_{d_1+d_2+\ldots+d_s-1} \in A_{d_1+d_2+\ldots+d_s}/A_{d_1+d_2+\ldots+d_s-1} \quad (60)$$

Определение 15. *(i) Пусть n_1 и n_2 – две целые точки множества $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$. Назовем их **одноконусными**, если*

$$\varphi(n_1 + n_2) = \varphi(n_1) + \varphi(n_2)$$

*что, согласно утверждению 19 (iii) раздела 3.1., эквивалентно тому, что существует хотя бы одна старшегрань $\Delta \subset \partial\Gamma$ такая, что $n_1 \in Cone(\Delta)$ и $n_2 \in Cone(\Delta)$. Точки n_1 и n_2 называются **разноконусными**, если*

$\varphi(n_1+n_2) < \varphi(n_1)+\varphi(n_2)$, или, эквивалентно:

не существует старшеграни Δ такой, что $n_1 \in Cone(\Delta)$ и $n_2 \in Cone(\Delta)$.

(ii) Аналогично определяется одноконусность/ разноконусность нескольких целых точек множества $\mathbb{Z}^d$:

*целые точки $n_1, n_2, \ldots, n_s$ называются **одноконусными**, если*

$$\varphi(n_1+n_2+\ldots+n_s) = \varphi(n_1)+\varphi(n_2)+\ldots+\varphi(n_s)$$

*что, согласно утверждению 19 (iii) раздела 3.1., эквивалентно тому, что существует хотя бы одна старшегрань Δ такая, что $n_1 \in Cone(\Delta), n_2 \in Cone(\Delta), \ldots n_s \in Cone(\Delta)$. Точки $n_1, n_2, \ldots, n_s$ называются **разноконусными**, если*

$$\varphi(n_1+n_2+\ldots+n_s) < \varphi(n_1)+\varphi(n_2)+\ldots+\varphi(n_s),$$

или, эквивалентно:
не существует старшеграни Δ такой, что $n_1 \in Cone(\Delta)$, $n_2 \in Cone(\Delta)$, $\ldots n_s \in Cone(\Delta)$.

Лингвистическое замечание. *На английский термины **одноконусный и разноконусный** переводятся как **homoconical/heteroconical**, а термины **одноконусность/разноконусность** как **homoconicality/heteroconicality**.*

Утверждение 24. *(i) Произведение мономов x^{n_1} и x^{n_2} в ассоциированной градуированной алгебре $\mathbb{A}$ задается правилом*

$$x^{n_1} \circ x^{n_2} = \begin{cases} x^{(n_1+n_2)}: & \text{если точки } n_1, n_2 \text{ одноконусны,} \\ 0: & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (61)$$

(ii) Аналогичное правило справедливо и для произведения произвольного количества мономов:

$$x^{n_1} \circ \ldots \circ x^{n_s} = \begin{cases} x^{(n_1+\ldots+n_s)}: & \text{если точки } n_1, \ldots, n_s \text{ одноконусны,} \\ 0: & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (62)$$

Доказательство. (i) По формуле (59)

$$(x^{n_1}+A_{d_1-1})\circ(x^{n_2}+A_{d_2-1}) = x^{n_1}\cdot x^{n_2}+A_{d_1+d_2-1}$$

Если точки n_1, n_2 разноконусны, то

$$\varphi(n_1+n_2) \le \varphi(n_1)+\varphi(n_2)-1 = d_1+d_2-1 \quad (63)$$

то есть $x^{n_1} \cdot x^{n_2} \in A_{d_1+d_2-1}$ и

$$x^{n_1} \cdot x^{n_2} + A_{d_1+d_2-1} = A_{d_1+d_2-1} = 0 \in A_{d_1+d_2}/A_{d_1+d_2-1}$$

Если же точки n_1, n_2 одноконусны, то

$$\varphi(n_1+n_2) = \varphi(n_1)+\varphi(n_2) = d_1+d_2$$

то есть $x^{n_1} \cdot x^{n_2} \in A_{d_1+d_2}$ и

$$x^{n_1} \cdot x^{n_2} + A_{d_1+d_2-1} = x^{(n_1+n_2)} + A_{d_1+d_2-1} \neq 0$$

(ii) доказывается аналогично (i) с использованием формулы (60) вместо формулы (59).

Проведенные выше построения фильтрации Ньютона и градуированного кольца повторяли рассуждения статьи [4] и не использовали симплициальность многогранника Γ. Ниже мы начинаем использовать эту симплициальность.

5.2.2. Подкольцо вершин градуированного кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$ сверх-удобного выпуклого целочисленного симплициального многогранника Γ

Рассмотрим в алгебре $\mathbb{A}$ линейное пространство, порожденное мономом x^0 и мономами, отвечающими вершинам многогранника Γ. Элемент этого линейного пространства есть конечная линейная комбинация мономов в $\mathbb{A}$, отвечающих точкам следующего множества:

$$V(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{N} V(\Delta_i) \quad (64)$$

Элементы множества $V(\Gamma)$, вообще говоря, не образуют полугруппу, при сложении точек из разных конусов мы можем выйти за пределы множества $V(\Gamma)$. Однако, мономы, соответствующие любым двум точкам множества $V(\Gamma)$, можно перемножать в $\mathbb{A}$ и при этом мы не выйдем за пределы множества $V(\Gamma) \cup 0$. Действительно, если точки одноконусны, произведение будет ненулевым мономом в $\mathbb{K}[V(\Gamma)]$; если же точки разноконусны, произведение будет равно нулю. Полученное кольцо назовем *подкольцом вершин* сверх-удобного симплициального многогранника Γ.

Замечание 2. *В отличие от структуры кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$, структура подкольца вершин определяется только комбинаторной структурой комплекса граней симплициального многогранника Γ и, вообще говоря, не зависит от вложения вершин многогранника в множество $\mathbb{Z}^d$. В данной работе, однако, кольцо вершин интересует нас не само по себе, а как подкольцо кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$, которое зависит не только от комбинаторной структуры многогранника Γ, но и от того как вершины этого целочисленного выпуклого многогранника Γ вложены в множество $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$.*

5.3. Кольцо вершин есть не что иное, как *кольцо Стенли-Рейснера* симплициального комплекса граней выпуклого целочисленного многогранника Γ

Определение 16. *Сопоставим каждой вершине v_i симплициального многогранника Γ независимую переменную V_i. Произведение различных независимых переменных назовем симплициальным, если вершины, соответствующие этим переменным, являются вершинами некоторого симплекса на границе многогранника Γ. Обозначим через I идеал, порожденный в $\mathbb{K}[V_1, V_2, \dots, V_L]$ теми произведениями неизвестных, которые не являются симплициальными. Идеал I называется идеалом граней многогранника Γ, а фактор по этому идеалу - кольцом граней или кольцом Стенли-Рейснера (см. [12]).*

Утверждение 25. *Пусть*

$$\pi : \mathbb{K}[V_1, V_2, \dots, V_L] \to \mathbb{K}[V(\Gamma)],$$

отображение, заданное на образующих кольца $\mathbb{K}[V_1, V_2, \dots, V_L]$ формулами $\pi(V_i) = x^{v_i}, i = 1, 2, \dots, L$. Тогда $ker(\pi) = I$. Иными словами, подкольцо градуированного кольца $\mathbb{A}$, порожденное мономами, отвечающими вершинам (нульмерным граням) многогранника Γ, изоморфно кольцу Стенли-Рейснера симплициального комплекса граней многогранника Γ.

Доказательство. Сначала докажем, что $I \subseteq ker(\pi)$. Пусть P - образующая идеала I, то есть некоторое несимплициальное произведение независимых переменных $V_1V_2 \dots V_s$. Элемент $\pi(P)$ кольца $\mathbb{K}[V(\Gamma)]$ является произведением мономов

$$x^{v_1} \circ x^{v_2} \circ \dots \circ x^{v_s}$$

Поскольку произведение P несимплициально, вершины $v_1, v_2, \ldots, v_s$ не принадлежат какой-либо одной грани многогранника Γ и по формуле (62) произведение равно нулю.

Теперь докажем включение $ker(\pi) \subseteq I$. Сначала докажем, что любой моном $p \in ker(\pi)$ принадлежит идеалу I. Пусть p произвольный моном. Выпишем произведение всех переменных, которые входят в моном p в положительной степени. Возможны два случая.

Если получилось несимплициальное произведение, то моном p оказывается кратным этому несимплициальному произведению независимых переменных, то есть $p \in I$.

Если же при таком выписывании получилось симплициальное произведение, то это означает, что в моном p входят независимые переменные, соответствующие вершинам некоторой грани δ многогранника Γ, и образ p оказывается мономом в $\mathbb{K}[V(\Gamma)]$, который, согласно определению $\mathbb{K}[V(\Gamma)]$, однозначно задает некоторый базисный вектор линейного пространства $\mathbb{K}[V(\Gamma)]$ и, значит, $\pi(p) \neq 0$.

Пусть, наконец, сумма различных мономов с ненулевыми коэффициентами $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_s p_s$ принадлежит ядру π. В такой сумме не может быть ни одного монома p_i, для которого $\pi(p_i) \neq 0$ поскольку образы таких мономов в $\mathbb{K}[V(\Gamma)]$ линейно независимы и любая линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами образов таких мономов не равна нулю. Тем самым из $\pi(f) = 0$ следует, что каждый входящий в f моном p_i также принадлежит $ker(\pi)$, значит, по ранее доказанному, принадлежит I, значит и линейная комбинация f таких мономов принадлежит I. □

Замечание 3. *Предположим на мгновение, что мы решили проводить вычисления в кольце $\mathbb{A}$ с помощью какой-то компьютерной системы. Описание кольца $\mathbb{A}$ в классической форме, в виде свободных образующих и соотношений, потребовало бы введения большого количества переменных, растущего с ростом числа вершин Γ. Наше описание аддитивной структуры кольца $\mathbb{A}$ требует введения лишь d переменных. За это приходится платить усложнением алгоритма умножения мономов, выполнение которого теперь требует не только сложения векторов показателей степени мономов, но и вычисления предиката* ***одноконусности*** *на множестве пар мономов.*

6. Шеллинг симплициального многогранника Γ и отвечающие ему "шеллинги" множества $\mathbb{Z}^d$ и кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$

По шеллингу многогранника Γ, то есть по последовательности старшеграней, удовлетворяющей некоторым условиям, мы построили в разделе 2.3. две другие последовательности объектов:
- последовательность подполугрупп $Ash_1, Ash_2, \ldots, Ash_N$ группы $\mathbb{Z}^d$, принадлежащих конусам $Cone(\Delta_1), Cone(\Delta_2), \ldots, Cone(\Delta_N)$;
- последовательность конечных множеств $Bsh_1, Bsh_2, \ldots, Bsh_N$ группы $\mathbb{Z}^d$, принадлежащих полугруппам $Ash_1, Ash_2, \ldots, Ash_N$.

Эти последовательности были построены так, что при любом $i \in [1, N]$ выполняются следующие утверждения:

- полугруппа Ash_i принадлежит полной полугруппе $A(\Delta_i)$ старшеграни Δ_i;
- объединение полугрупп $Ash_1 \cup Ash_2, \cup \ldots, \cup Ash_i$ исчерпывает множество целых точек конусов старшеграней $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i$, то есть

  $$Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_i =$$
  $$A(\Delta_1) \cup A(\Delta_2) \cup \ldots \cup A(\Delta_i),$$

  в частности $Ash_1 \cup \ldots, \cup Ash_N = \mathbb{Z}^d$;

- при $i > 1$ полугруппа Ash_i не пересекается с $Ash_1 \cup Ash_2, \cup \ldots, \cup Ash_{i-1}$;
- подполугруппа Ash_i инвариантна относительно действия полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ старшеграни Δ_i на полной полугруппе старшеграни Δ_i;
- множество Bsh_i принадлежит Ash_i и при $i > 1$ не пересекается с множеством $Bsh_1 \cup Bsh_2, \cup \ldots, \cup Bsh_{i-1}$;
- множество Bsh_i является фундаментальной областью действия полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ грани Δ_i на подполугруппе Ash_i, то есть сдвиги конечного множества Bsh_i на всевозможные элементы полугруппы вершин $V(\Delta_i)$ образуют разбиение бесконечного множества Ash_i;
- мощность множества Bsh_i равна объему параллелепипеда Π_i sh-старшеграни Δ_i^{sh}, определенного в разделе 2.4.2..

6.1. Построение "шеллинга" кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$

Построим теперь аналог "шеллинга" кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$: последовательность градуированных $\mathbb{K}$-алгебр $R_1, R_2, \ldots, R_N$, заканчивающуюся $\mathbb{K}$-алгеброй $\mathbb{A}(\Gamma)$. Это построение аналогично конструкции статьи [10], переизложенной в книге [11].

В то время, как объекты Ash_i и Bsh_i расположены внутри конуса одной старшеграни Δ_i, то есть "привязаны" к одной старшеграни, $\mathbb{K}$-алгебра R_i будет "привязана" к объединению старшеграней с номерами от 1 до i. Сначала определим $R_1, R_2, \ldots, R_N$ как линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Определение 17. *Для каждого $i \in [1, N]$ построим над $\mathbb{K}$ линейное пространство R_i, взяв в качестве базиса мономы, показатели степени которых принадлежат объединению полугрупп $E_i = (Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_i)$, которое, в свою очередь, принадлежит объединению конусов $(Cone(\Delta_1) \cup Cone(\Delta_2) \cup \ldots \cup Cone(\Delta_i))$.*

Поскольку для $1 \leq j < i$ объединение первых j полугрупп E_j содержится в объединении первых $j+1$ полугрупп E_{j+1}, то есть

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_i = \mathbb{Z}^d$$

то для $1 \leq j < i$ базис каждого линейного пространства R_j содержится в базисе следующего линейного пространства R_{j+1} и потому можно считать, что построенные линейные пространства естественно вложены друг в друга:

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_i = \mathbb{A}(\Gamma)$$

Векторное пространство $R_N = \mathbb{A}(\Gamma)$ имеет структуру $\mathbb{K}$-алгебры. Введем структуру $\mathbb{K}$-алгебры на векторных пространствах R_i для $1 \leq i < N$. С помощью аналога определения одноконусности 15 и аналога правила (59) перемножения мономов в $\mathbb{A}(\Gamma)$, зададим правило умножения базисных векторов в R_j, то есть правило перемножения мономов вида x^n, где показатель степени $n = Log(x^n)$ принадлежит объединению множеств $E_i = Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_i$. К числу таких мономов принадлежит и *единичный* моном x^0, имеющий нулевой показатель степени. Операцию умножения мономов с показателями степени из множества E_i обозначим "$\circ_i$". Результатом этой операции будет моном (базисный вектор) в R_i или 0 линейного пространства R_i. Далее мы доопределим эту операцию на все векторное пространство R_j. В качестве первого шага доопределим операцию "$\circ_i$" разрешив использовать в качестве ее аргументов не только мономы, но и 0 линейного пространства R_i (отличный от единичного монома $x^0 \in E_i$). А именно, для любого монома x^n положим

$$x^n \circ_i 0 = 0 \circ_i x^n = 0 \circ_i 0 = 0 \in R_i$$

Определение 18. *(i) Пусть n_1 и n_2 – две целые точки в $E_i = Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_i$. Назовем их* **i*–одноконусными***, *если существует хотя бы один номер $j \in [1, i]$ такой, что $n_1 \in Cone(\Delta_j)$ и $n_2 \in Cone(\Delta_j)$. Точки n_1 и n_2 назовем* **i*–разноконусными***, *если они не являются* **i*–одноконусными***. *(ii) Аналогично определим* **i*–одноконусность*** *и* **i*–разноодноконусность*** *нескольких точек в $E_i = Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_i$:*
целые точки $n_1, n_2, \ldots, n_s$ в $E_i = Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_i$ назовем **i*–одноконусными***, *если существует хотя бы один номер $j \in [1, i]$ такой, что $n_1 \in Cone(\Delta_j), n_2 \in Cone(\Delta_j)$, $\ldots n_s \in Cone(\Delta_j)$. Точки $n_1, n_2, \ldots, n_s$ назовем* **i*–разноконусными***, *если они не являются* **i*–одноконусными***.
(iii) определим операцию "$\circ_i$" правилом, аналогичным правилу (61):

$$x^{n_1} \circ_i x^{n_2} = \begin{cases} x^{(n_1+n_2)} : & \text{если точки } n_1, n_2 \\ & \textbf{i–одноконусны,} \\ 0 : & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{65}$$

(iv) Доопределим операцию "$\circ_i$", разрешив использовать в качестве ее аргументов не только мономы вида x^n, где $n \in E_i$, но и $0 \in R^i$ и считая в этом случае результат операции равным $0 \in R^i$.

Пример. Пусть многоугольник Ньютона Γ на плоскости имеет вершины $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-1, -1)$, $v_3 = (0, 1)$. Тогда старшегранями Γ будут $\Delta_1 = [v_1, v_2]$, $\Delta_2 = [v_2, v_3]$, $\Delta_3 = [v_3, v_1]$. Зададим на Γ шеллинг $sh = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$. Тогда

конус $Cone(\Delta_1)$ содержит точки v_1 и v_2,
конус $Cone(\Delta_2)$ содержит точки v_2 и v_3,
конус $Cone(\Delta_3)$ содержит точки v_1 и v_3.

Оба векторные пространства R_2 и R_3 трехмерны и содержат базисные векторы v_1, v_2, v_3. Таким образом мономы x^{v_1} и x^{v_3} принадлежат и R_2 и R_3, но произведения этих мономов в R_2 и R_3 отличаются:

$$x^{v_1} \circ_2 x^{v_3} = 0$$
$$x^{v_1} \circ_3 x^{v_3} = x^{v_1+v_3} \neq 0$$

Докажем ассоциативность операции "$\circ_i$" на дискретном множестве базисных векторов векторного пространства R_i, расширенном точкой 0 и продолжим эту операцию на все векторное пространство R_i.

Утверждение 26. *(i) Операция "$\circ_i$" является ассоциативной операцией на дискретном множестве, состоящем из 0 и базисных векторов линейного пространства R_i.*
(ii) Произведение произвольного числа мономов в $\mathbb{K}$-алгебре R_i вычисляется по правилу

$$x^{n_1} \circ_i \ldots \circ_i x^{n_s} = \begin{cases} x^{(n_1+\ldots+n_s)}: & \text{если точки } n_1,\ldots,n_s \ \mathbf{i-одноконусны} \\ 0: & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{66}$$

(iii) Продолжение по линейности и дистрибутивности этой операции на все линейное пространство R_i задает на R_i структуру $\mathbb{K}$-алгебры.

Доказательство. (i) При любой расстановке скобок в произведении трех сомножителей, один из которых является нулем, а два других нулем или базисным вектором пространства R_i, результат вычисления произведения будет нулем. Поэтому нам остается доказать, что для любых трех мономов x^a, x^b и x^c в R_i выполнено равенство

$$(x^a \circ_i x^b) \circ_i x^c = x^a \circ_i (x^b \circ_i x^c) \tag{67}$$

Если хотя бы один моном из трех является единичным, то равенство (67) очевидно, поэтому можно считать, что точки a, b и c ненулевые. Если три точки a, b и c одноконусны, то равенство (67) вытекает из ассоциативности операции сложения в $\mathbb{R}^d$

$$(x^a \circ_i x^b) \circ_i x^c = x^{(a+b)} \circ_i x^c = x^{(a+b)+c} = x^{a+b+c}$$

$$x^a \circ_i (x^b \circ_i x^c) = x^a \circ_i x^{(b+c)} = x^{a+(b+c)} = x^{a+b+c}$$

Случай 1. Предположим, что

$$(x^a \circ_i x^b) \circ_i x^c \neq 0 \tag{68}$$

Докажем одноконусность точек a, b и c. Первый сомножитель в произведении (68) не равен нулю, поэтому, по определению "$\circ_i$"

$$(x^a \circ_i x^b) = x^{a+b} \quad \text{и значит } x^{(a+b)} \circ_i x^c \neq 0$$

Поэтому точки $(a+b)$ и c **i−одноконусны**, то есть среди конусов

$$Cone(\Delta_1), Cone(\Delta_2), \ldots, Cone(\Delta_i)$$

найдется конус $Cone$ такой, что $(a+b) \in Cone$ и $c \in Cone$. Так как $(x^a \circ_i x^b) \neq 0$ то точки a и b одноконусны, то есть существует конус $Cone_j$, где $1 \leq j \leq i$ такой, что $a \in Cone_j$, $b \in Cone_j$ и $(a+b) \in Cone_j$. Таким образом $(a+b) \in Cone \cap Cone_j$. Если $Cone_j$ совпадает с $Cone$ то все три точки принадлежат $Cone$ и одноконусность доказана. Если же $Cone_j \neq Cone$, то точка $(a+b)$ принадлежит пересечению конусов $F = Cone_j \cap Cone$. Согласно свойствам граней выпуклого сверхудобного симплициального многогранника Γ множество F является собственной гранью конуса $Cone$. Согласно утверждению 5 раздела 2.4. из $(a+b) \in F$ следует, что $a \in F \subset Cone$ и $b \in F \subset Cone$. Поэтому все три показателя степени a, b, c принадлежат одному и тому же конусу $Cone$. Тем самым для случая 1 формула (67) доказана.

Случай 2. Предположим, что

$$(x^a \circ_i x^b) \circ_i x^c = 0$$

Докажем, что

$$x^a \circ_i (x^b \circ_i x^c) = 0$$

Предположим противное

$$x^a \circ_i (x^b \circ_i x^c) \neq 0 \tag{69}$$

Повторяя рассуждения случая 1, получаем, что три показателя степени a, b, c принадлежат одному и тому же конусу $Cone$ и значит

$$(x^a \circ_i x^b) \circ_i x^c = x^{(a+b)} \circ_i x^c = x^{(a+b)+c} = x^{a+b+c} \neq 0$$

что противоречит исходному предположению (69). □

Доказательства (ii) и (iii) предоставляются читателю.

6.2. Свойства "шеллинга" кольца $\mathbb{A}$

В R_i определим линейное подпространство I_i, порожденное мономами, соответствующими элементам множества Ash_i. Тогда базисы в трех линейных пространствах R_i, R_{i-1} и I_i будут образованы мономами, соответствующими точкам трех множеств $E_i = (Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_{i-1}) \cup Ash_i$, $E_{i-1} = (Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_{i-1})$ и Ash_i соответственно.

При $1 < i \leq N$ базис векторного пространства R_{i-1} является подмножеством базиса пространства R_i, поэтому определены покоординатное вложение $h_i : R_{i-1} \to R_i$ и покоординатная проекция $\pi_i : R_i \to R_{i-1}$ векторных пространств. Очевидно, что R_i есть прямая сумма $h_i(R_{i-1}) \oplus I_i$ и, как линейное пространство, R_{i-1} изоморфно фактор-пространству R_i/I_i.

Ньютоновская степень задает на R_i градуировку. Задав в определении 18 умножение элементов R_i, мы ввели на R_i структуру градуированной $\mathbb{K}$-алгебры. Градуированная алгебра R_i при $i = N$ совпадает с ассоциированным градуированным кольцом $\mathbb{A}(\Gamma)$.

В формулировке и доказательстве следующего утверждения число $i > 1$ будет фиксировано и для упрощения формул отображения h_i, π_i будут обозначаться как h и π соответственно.

Утверждение 27. *(a) $\mathbb{K}$-алгебра R_i конечно порождена мономами, соответствующими вершинам граней $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i$ и мономами, отвечающими элементам множеств $Bsh_1, Bsh_2, \ldots, Bsh_i$. (b) линейное пространство I_i является подалгеброй в R_i, (c) подалгебра I_i является идеалом в R_i, (d) при $i > 1$ для любых мономов x^p и x^q из R_{i-1} выполнено тождество*

$$h(x^p \circ_{i-1} x^q) = h(x^p) \circ_i h(x^q) + r, \text{ где } r \in I_i \quad (70)$$

(e) фактор-алгебра R_i/I_i изоморфна R_{i-1}.

Доказательство. (a) вытекает из утверждения 14. (b)–(c) очевидно вытекают из утверждения 26, которое задает операцию умножения в R_i.
Докажем (d). Пусть p, q две точки в $(Ash_1 \cup Ash_2 \cup \ldots \cup Ash_{i-1})$ и x^p и x^q соответствующие им два монома в R_{i-1}. Мы должны найти добавку $r \in I_i$, обеспечивающую выполнение тождества (70). Для точек p, q выполнено одно из трех взаимоисключающих условий.
1) Точки p, q одновременно принадлежат одному из конусов $Cone(\Delta_1), \ldots, Cone(\Delta_{i-1})$. В этом случае, согласно определению 18,
$h(x^p \circ_{i-1} x^q) = h(x^p) \circ_i h(x^q)$ и равенство (70) выполняется для $r = 0$.
2) Точки p, q не лежат одновременно ни в одном из конусов $Cone(\Delta_1), \ldots, Cone(\Delta_i)$. В этом случае, согласно определению 18,
$x^p \circ_{i-1} x^q = 0$ и $h(x^p) \circ_i h(x^q) = 0$ и снова равенство (70) выполняется для $r = 0$. Осталось разобрать случай:
3) Точки p, q не лежат одновременно ни в одном из конусов $Cone(\Delta_1), \ldots, Cone(\Delta_{i-1})$, то есть $x^p \circ_{i-1} x^q = 0$, но обе лежат в конусе $Cone(\Delta_i)$, то есть $h(x^p) \circ_i h(x^q) \neq 0$.

Докажем, что в этом случае $p + q \in Ash_i$, а значит, $h(x^p) \circ_i h(x^q) = x^{(p+q)} \in I_i$ и равенство (70) выполнено для $r = x^{(p+q)}$.

Действительно, пусть δ - одна из подграней коразмерности 1 старшеграни Δ_i, лежащая в пересечении Δ_i с одной из граней $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{i-1}$ и c - локальная координатная функция на конусе $Cone(\Delta_i)$, обращающаяся в 0 на грани δ. Точки p и q не могут одновременно лежать в конусе грани δ, так как в этом случае они одновременно лежали бы в одном из конусов $Cone(\Delta_1), Cone(\Delta_2), \ldots, Cone(\Delta_{i-1})$, что противоречило бы исходному предположению случая 3). А это значит, что одно из чисел $c(p)$ и $c(q)$ положительно, а значит, положительно и число $c(p+q)$, равное $c(p)+c(q)$. Поскольку это рассуждение применимо для любой подграни коразмерности один, получающей в результате пересечения старшеграни Δ_i с одной из граней $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{i-1}$, то, согласно определению множества Ash_i это и означает, что $p + q \in Ash_i$, что завершает доказательство равенства (70).

Докажем (e). Поскольку $ker(\pi) = I_i$, достаточно доказать, что $\pi : R_i \to R_{i-1}$ - гомоморфизм колец. Так как R_i есть прямая сумма $h(R_{i-1}) \oplus I_i$, любые два монома A, B в R_i представимы в виде $A = h(a) + u, B = h(b) + v$, где мономы a, b принадлежат R_{i-1} и u, v принадлежат I_i. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\pi(A \circ B) = \\
&\pi(h(a) \circ_i h(b)) + \pi(h(a) \circ_i v + h(b) \circ_i u + u \circ_i v) = \\
&\pi(h(a) \circ_i h(b))
\end{aligned}$$

Из равенства (70) следует существование такого $r \in I_i$, что:

$$\begin{aligned}
&\pi(h(a) \circ_i h(b)) = \\
&\pi(h(a \circ_{i-1} b)) - r) = \\
&a \circ_{i-1} b = \\
&\pi(A) \circ_{i-1} \pi(B)
\end{aligned}$$

Мы доказали, что $\pi(A \circ_i B) = \pi(A) \circ_{i-1} \pi(B)$, то есть доказали, что π - гомоморфизм колец. $\square$

7. Коэн-Маколеевость кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$

В этом разделе будет построена регулярная последовательность из d однородных элементов кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$ с носителями в вершинах Γ и предъявлен мономиальный базис фактор-алгебры кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$ по идеалу, порожденному элементами этой последовательности. Этот базис состоит из классов эквивалентности мономов, показатели степени которых принадлежат множеству $\mathbb{B}^{sh} = Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_N$, построенному в разделе 2.5. Мощность этого множества, согласно утверждению 18(ii), равна $\mu(\Gamma) = d! \times Volume(\Gamma)$.

7.1. Определение невырожденности последовательности однородных элементов $f_1, f_2, \ldots, f_d$ кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$ с носителями в вершинах Γ и построение "шеллинга" такой последовательности

Обозначим вершины симплициального многогранника Γ через $w_1, w_2, \ldots, w_L$ и рассмотрим последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_d$ элементов кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$, заданную формулами:

$$\begin{cases} f_1 = & c_{11}x^{w_1} + c_{12}x^{w_2} + \ldots + c_{1L}x^{w_L} \\ f_2 = & c_{21}x^{w_1} + c_{22}x^{w_2} + \ldots + c_{2L}x^{w_L} \\ \quad \ldots & \\ f_d = & c_{d1}x^{w_1} + c_{d2}x^{w_2} + \ldots + c_{dL}x^{w_L} \end{cases} \tag{71}$$

Коэффициенты этих функций образуют $d \times L$ матрицу C с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Каждой вершине Γ соответствует столбец матрицы C, а каждой старшеграни соответствует $d \times d$ минор.

Определение 19. *Последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_d$ назовем невырожденной, если все $d \times d$ миноры матрицы C, соответствующие старшеграням, отличны от нуля.*

Существование невырожденных последовательностей можно было бы вывести из бесконечности поля $\mathbb{K}$. Но в предположении равенства нулю характеристики поля $\mathbb{K}$ мы предъявим одну невырожденную последовательность явно.

Пример невырожденной последовательности.
Начнем с суммы мономов всех вершин Γ

$$f = x^{w_1} + x^{w_2} + \ldots + x^{w_L}$$

и возьмем последовательность "торических" частных производных f:

$$f_1 = x_1 \partial f / \partial x_1, \ \ldots, \ f_d = x_d \partial f / \partial x_d \tag{72}$$

Доказательство невырожденности последовательности (72). Действительно, для этой последовательности матрица C будет состоять из векторов-столбцов координат вершин многогранника Γ, а минор, отвечающие любой старшеграни, будет определителем $d \times d$-матрицы, составленной из векторов-столбцов координат вершин этой старшеграни. И ввиду сверх-удобности многогранника Γ этот определитель не обращается в ноль. □

Для $i \in [1, N]$ построим "ограничения" $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}$ функций $f_1, f_2, \ldots, f_d$ на $\mathbb{K}$-алгебру R_i. Чтобы из набора функций $f_1, f_2, \ldots, f_d$ получить набор функций $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}$ нужно в формулах (71) в каждой строке оставить только члены с мономами, отвечающими вершинам многогранника, лежащими в объединении граней $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_i$. Обозначим через $C^{(i)}$ матрицу, соответствующую последовательности $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}$.

В так построенной последовательности $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}$ элементов кольца R_i все миноры матрицы C, отвечающие старшеграням $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i$, будут ненулевыми.

Утверждение 28. *Фиксируем $i \in [1, N]$ и обозначим через $w_1, w_2, \ldots, w_d$ вершины старшеграни Δ_i. Тогда (a) существуют линейные комбинации $\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \ldots, \theta_d^{(i)}$ элементов $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}$ такие, что каждый моном x_j^w, где $j \in [1, d]$, входит с ненулевым коэффициентом только в комбинацию $\theta_j^{(i)}$.*
(b) Подалгебры $\mathbb{K}[f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}]$ и $\mathbb{K}[\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \ldots, \theta_d^{(i)}]$ алгебры R_i совпадают.

Доказательство вытекает из невырожденности последовательности функций $f_1, f_2, \ldots, f_d$. При использовании этого утверждения будем считать, что моном x_j^w входит в $\theta_j^{(i)}$ с коэффицентом 1.

7.2. Формулировка основного технического результата данной статьи

Сформулируем теперь основной технический результат данной статьи, относящийся к градуированной алгебре $\mathbb{A}(\Gamma)$. Результат состоит в том, что эта градуированная алгебра обладает свойством коэн-маколеевости.

Теорема 4. *Пусть $f_1, \ldots, f_d$ последовательность функций в $\mathbb{A}(\Gamma)$, невырожденная в смысле определения 19. Для $i \in [1, N]$ положим*

$$X_i = \mathbb{K}[f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}] \subset R_i$$

Тогда
(a) Для любого $i \in [1, N]$ классы эквивалентности мономов с показателями степени, пробегающими множество $Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_i$, порождают R_i как модуль над X_i;
(b) последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_d$

регулярна и, значит, кольцо $\mathbb{A}(\Gamma)$ является кольцом Коэна-Маколея;
(c) базис фактор-алгебры алгебры $\mathbb{A}(\Gamma)$ по идеалу $I = (f_1, f_2, \dots, f_d)$ образуют классы эквивалентности мономов с показателями степени, пробегающими множество

$$\mathbb{B}^{sh} = (Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_N)$$

Коразмерность идеала I равна

$$\mu(\Gamma) = d! \times Volume(\Gamma).$$

Утверждение (a) будет ниже доказано индукцией по i. Это доказательство и есть центральное рассуждение данной статьи. Оно обощает доказательство, приведенное в статье [10] и переизложенное в [11].

Утверждения (b) и (c) теоремы 4 мы сейчас выведем из утверждения (a) этой теоремы с помощью стандартной техники поэлементного сравнения рядов Пуанкаре, изложенной, например, в [11]. Это рассуждение оформим в виде Утверждения 7.3.. Условием этого утверждения является заключение (a) Теоремы 4, а из заключений (1), (2) и (3) утверждения 7.3. следуют заключения (b) и (c) теоремы 4.

7.3. Вывод утверждений (b) и (c) теоремы 4 из утверждения (a) этой теоремы

Утверждение 29. *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_d$ последовательность однородных функций степени M кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$. Обозначим через I и X идеал и подалгебру, порожденные этими функциями. Если мономы с показателями степени, пробегающими множество $\mathbb{B}^{sh} = (Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_N)$, порождают $\mathbb{A}(\Gamma)$ как модуль над подалгеброй X, то*
(1) классы эквивалентности этих мономов образуют базис фактор-алгебры $\mathbb{A}(\Gamma)/I$ и коразмерность идеала I равна $d! \times Volume(\Gamma)$;
(2) эти мономы свободно порождают $\mathbb{A}(\Gamma)$ над X;
(3) последовательность $f_1, f_2, \dots, f_d$ элементов кольца $\mathbb{A}(\Gamma)$ является регулярной.

Доказательство. Обозначим для краткости $\mu(\Gamma)$ через μ. Мощность множества $\mathbb{B}^{sh} = (Bsh_1 \cup Bsh_2 \ldots \cup Bsh_N)$, определенного в разделе 2.5., равна μ. Обозначим через $m_1, m_2, \dots, m_\mu$ - мономы в $\mathbb{A}(\Gamma)$, отвечающие точкам множества $\mathbb{B}^{sh}$, через $\mathbb{B}^{sh}_{\mathbb{K}}$ - конечномерное градуированное с помощью ньютоновской степени линейное пространство, порожденное этими мономами и через $Q(t)$ ряд Пуанкаре $H(\mathbb{B}^{sh}_{\mathbb{K}}, t)$. Докажем, что классы эквивалентности мономов $m_1, m_2, \dots, m_\mu$ порождают фактор-алгебру $\mathbb{A}(\Gamma)/I$ над полем $\mathbb{K}$. Поскольку дано, что мономы, отвечающие элементам этого множества, порождают $\mathbb{A}(\Gamma)$ как модуль над подалгеброй X, произвольный элемент $G \in \mathbb{A}(\Gamma)$ представляется в виде

$$G = \sum_{i=1}^{\mu} S_i(g_1, g_2, \dots, g_d) m_i, \quad \text{где } S_i \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_d] \tag{73}$$

Обозначим через $s_i \in \mathbb{K}$ свободный член многочлена S_i и перепишем (73) в

$$G = \sum_{i=1}^{\mu} s_i m_i + \sum_{i=1}^{\mu} (S_i(g_1, g_2, \dots, g_d) - s_i) m_i \tag{74}$$

Поскольку каждая разность $S_i(g_1, g_2, \dots, g_d) - s_i$ принадлежит идеалу I, вторая сумма в (74) принадлежит идеалу I и, значит, классы эквивалентности мономов $m_1, m_2, \dots, m_\mu$ порождают фактор-алгебру $\mathbb{A}(\Gamma)/I$. Поэтому выполняется поэлементное неравенство между рядами Пуанкаре

$$Q(t) \geq H(\mathbb{A}(\Gamma)/(f_1, f_2, f_3, \dots, f_d), t) \tag{75}$$

Согласно формуле (58) раздела 4.1., проведение последовательной факторизации $\mathbb{A}(\Gamma)$ по элементам $f_1, f_2, f_3, \dots, f_d$ дает неравенство

$$H(\mathbb{A}(\Gamma), t) \leq \frac{H(\mathbb{A}(\Gamma)/(f_1, f_2, f_3, \dots, f_d), t)}{(1 - t^M)^d} \tag{76}$$

Согласно формуле (56) и утверждению 20, ряд Пуанкаре $\mathbb{K}$-алгебры $\mathbb{A}(\Gamma)$ равен

$$H(\mathbb{A}(\Gamma), t) = \frac{Q(t)}{(1 - t^M)^d} \tag{77}$$

где $Q(t)$ есть не что иное, как ряд Пуанкаре конечномерного линейного пространства $\mathbb{B}^{sh}_K$, порожденного мономами, показатели степени которых принадлежат множеству $\mathbb{B}^{sh} = (Bsh_1 \cup Bsh_2 \ldots \cup Bsh_N)$. Подставив (77) в левую часть (76), получаем

$$\frac{Q(t)}{(1 - t^M)^d} \leq \frac{H(\mathbb{A}(\Gamma)/(f_1, f_2, f_3, \dots, f_d), t)}{(1 - t^M)^d} \tag{78}$$

Умножив поэлементное неравенство (75) на ряд с неотрицательными коэффициентами $\frac{1}{(1-t^M)^d}$, получаем

$$\frac{Q(t)}{(1 - t^M)^d} \geq \frac{H(\mathbb{A}(\Gamma)/(f_1, f_2, f_3, \dots, f_d), t)}{(1 - t^M)^d} \tag{79}$$

Из (78) и (79) следует, что

$$\frac{Q(t)}{(1 - t^M)^d} = \frac{H(\mathbb{A}(\Gamma)/(f_1, f_2, f_3, \dots, f_d), t)}{(1 - t^M)^d} \tag{80}$$

откуда вытекает, что

$$Q(t) = H(\mathbb{A}(\Gamma)/(f_1, f_2, f_3, \dots, f_d), t)$$

значит, множество мономов вида x^b, где $b \in \mathbb{B}^{sh} = (Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_N)$ образуют базис фактор-алгебры $\mathbb{A}(\Gamma)/(f_1, f_2, \dots, f_d)$, что доказывает 29.(1). По теореме 3 из 29.(1) вытекает 29.(2) и 29.(3). □

7.4. Доказательство утверждения (a) теоремы 4

Введем следующее определение.

Определение 20. *Моном $m \in R_i$ назовем* ***представимым в*** *R_i, если m принадлежит X_i-подмодулю, порожденному в R_i мономами с показателями степени, пробегающими множество $\mathbb{B}^{sh} = (Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_i)$.*

Для доказательства утверждения (a) теоремы 4 будет достаточно установить представимость любого монома в R_i . Начнем с доказательства двух вспомогательных утверждений.

Утверждение 30. *Пусть v - вершина одной из старшеграней $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i$ и x^v - соответствующий моном. Тогда для любого $b \in Bsh_i$ произведение $x^v \circ_i x^b$ представимо в R_i.*

Доказательство утверждения 30 в случае $v \notin \Delta_i$**.** Для $i > 1$ точки множества Bsh_i по построению не принадлежат конусам старшеграней $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{i-i}$. Поэтому, если вершина v не принадлежит грани Δ_i, то точки v и b не могут принадлежать конусу какой-либо одной старшеграни и, по определению операции умножения в R_i, произведение мономов $x^v \circ_i x^b$ равно 0.

Доказательство утверждения 30 в случае $v \in \Delta_i$**.** Если вершина v принадлежит грани Δ_i, то согласно утверждению 28, существует линейная комбинация θ функций $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, f_3^{(i)}, \dots, f_d^{(i)}$, имеющая вид

$$\theta = x^v + \sum_{w \notin \Delta_i} f_w x^w \tag{81}$$

Умножим в R_i равенство (81) на x^b, где $b \in Bsh_i$. Согласно предыдущему случаю, для каждого $w \notin \Delta_i$ произведение $f_w(x^w \circ_i x^b)$ равно 0 и мы получаем $\theta \circ_i x^b = x^v \circ_i x^b$, что означает представимость произведения $x^v \circ_i x^b$, поскольку $\theta \in X_i$.

Утверждение 31. *Пусть $v_1, v_2, \dots, v_l$ - последовательность (возможно с повторениями) вершин старшеграни Δ_i и $b \in Bsh_i$. Тогда при $l \geq 1$ произведение*

$$x^{v_1} \circ_i x^{v_2} \circ_i \ldots \circ_i x^{v_l} \circ_i x^b \tag{82}$$

представимо в R_i.

Согласно утверждению 28(i), для каждой вершины v грани Δ_i существует линейная комбинация θ функций $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, f_3^{(i)}, \dots, f_d^{(i)}$ имеющая вид

$$\theta = x^v + r, \text{ где } r = \sum_{w \notin \Delta_i} f_w x^w \tag{83}$$

Построим такое представление для каждой вершины произведения (82)

$$\begin{aligned} \theta_1 &= x_1^v + r_1 \\ \theta_2 &= x_2^v + r_2 \\ &\dots \\ \theta_l &= x_l^v + r_l \end{aligned}$$

Докажем по индукции несколько более точное утверждение

$$(x^{v_1} x^{v_2} \ldots x^{v_l})x^b = (\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_l)x^b \tag{84}$$

База индукции в доказательстве формулы 84. Случай $l = 1$, то есть представимость произведения $x^{v_1} x^b$ в виде произведения θx^b разобран в доказательстве утверждения 30.

Индуктивный переход $(l-1) \rightarrow l$ **в доказательстве формулы 84**. По предположению индукции

$$(x^{v_1} x^{v_2} \ldots x^{v_{l-1}})x^b = (\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{l-1})x^b$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (x^{v_1} x^{v_2} \ldots x^{v_{l-1}})\, x^{v_l} x^b &= \\ x^{v_l}\, (x^{v_1} x^{v_2} \ldots x^{v_{l-1}})x^b &= \\ x^{v_l}(\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{l-1})x^b &= \\ (\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{l-1})x^{v_l} x^b &= \\ (\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_l)x^b \end{aligned}$$

Утверждение 32. *Любой элемент x^a, где $a \in Ash_i$, представим.*

Доказательство. Согласно утверждению 16 раздела 2.4.2., элемент x^a может быть представлен как $x^a = x^v x^b$, где $v \in V(\Delta_i)$ и $b \in Bsh_i$. Остается применить утверждение 31.

Доказательство утверждения (a) теоремы 4. Индукция по i.

База индукции. При $i = 1$, $R_1 = A(\Delta_1)$, $Bsh_1 = B(\Delta_1)$, $X_1 = V(\Delta_1)$ и мономы множества $B(\Delta_1)$ порождают $A(\Delta_1)$ как

$V(\Delta_1)$-модуль согласно утверждению 9.

Индуктивный переход $(i-1) \rightarrow i$ **в случае, когда множество вершин не увеличивается.** Воспользуемся обозначениями раздела 6.1.. В этих обозначениях последовательность функций $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, f_3^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}$ совпадает с последовательностью функций $h_i(f_1^{(i-1)}), h_i(f_2^{(i-1)}), h_i(f_3^{(i-1)}), \ldots, h_i(f_d^{(i-1)})$. Запишем R_i в виде $h_i(R_{i-1}) \oplus I_i$. Мы должны показать, что каждый элемент множества R_i представим. Элементы I_i имеют вид x^a, где $a \in Ash_i$. Такие элементы представимы согласно утверждению 32. Найдем представление для любого элемента $h_i(e) \in h_i(R_{i-1})$. По предположению индукции, элемент $e \in R_{i-1}$ представляется как сумма произведений вида fx^b, где $f \in X_{i-1}, b \in Bsh_1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_{i-1}$. Из равенства 70 и того факта, что I_i является идеалом, вытекает, что для любых элементов p и q из R_{i-1} выполнено равенство

$$h(p \circ_{i-1} q) = h(p) \circ_i h(q) + r, \text{ где } r \in I_i$$

Отсюда легко выводится, что для любого многочлена P от нескольких переменных и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_j$ кольца R_{i-1} выполняется соотношение

$$\begin{aligned} &h_i(P(a_1, a_2, \ldots, a_j) = \\ &P(h_i(a_1), h_i(a_2), \ldots, h_i(a_j)) + r, \text{ где } r \in I_i \end{aligned}$$

Применяя это равенство к каждому произведению fx^b, получаем, что элемент $h(e)$ принадлежит I_i и, значит, представим согласно утверждению 32.

Индуктивный переход $(i-1) \rightarrow i$ **в случае, когда множество вершин увеличивается на одну вершину.** В этом случае новая грань Δ_i содержит $d-1$ старую вершину и одну новую вершину, скажем w. Мономы в R_i можно разделить на старые, принадлежащие $h_i(R_{i-1})$ и новые, соответствующие точкам Ash_i. Новые мономы представимы согласно утверждению 31. Для старых мономов результат умножения в R_i совпадает с умножением в R_{i-1}, точнее, в отличие от предыдущего случая, вложение $\mathbb{K}$-линейных пространств $h_i : R_{i-1} \rightarrow R_i$ является гомоморфизмом колец. Единственное, что остается доказать, это тот факт, что старые мономы, представимые в R_{i-1}, остаются представимыми в R_i, несмотря на изменение в функциях. Каждая новая функция $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, f_3^{(i)}, \ldots, f_d^{(i)}$ получается из соответствующей старой функции добавлением монома w с некоторым коэффициентом. Обозначим старые и новые функции буквами $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_d$ и $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d$ соответственно. Тогда для некоторых констант $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ получаем следующее выражение старых функций через новые

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \theta_1 - \lambda_1 x^w \\ \theta'_2 &= \theta_2 - \lambda_2 x^w \\ &\ldots \\ \theta'_d &= \theta_d - \lambda_d x^w \end{aligned} \tag{85}$$

По предположению индукции, каждый моном m в R_{i-1} представляется в виде

$$m = \sum_{b \in Bsh1 \cup Bsh_2 \cup \ldots \cup Bsh_{i-1}} P_b(\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_d) x^b \tag{86}$$

Достаточно доказать представимость каждого члена суммы (86). Выберем один член суммы, сделаем замену (85) и разложим результат замены по степеням x^w:

$$\begin{aligned} &P_b(\theta_1 - \lambda_1 x^w, \theta_2 - \lambda_2 x^w, \ldots, \theta_d - \lambda_d x^w) x^b = \\ &S_0(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d) x^b + \\ &S_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d) x^w x^b + \\ &S_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d) (x^w)^2 x^b + \\ &S_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d) (x^w)^3 x^b + \\ &\ldots \end{aligned} \tag{87}$$

Член с S_0 **представим** по определению. Для доказательства представимости следующих членов достаточно доказать представимость произведений

$$x^w x^b, (x^w)^2 x^b, (x^w)^3 x^b, \ldots$$

Заметим, что новая вершина w не принадлежит конусам $Cone(\Delta_1), \ldots Cone(\Delta_{i-1})$.

Значит, если $b \notin Cone(\Delta_i)$, то произведения $x^w x^b, (x^w)^2 x^b, \ldots$ равны нулю по определению операции умножения в R_i.

Если же $b \in Cone(\Delta_i)$ то эти произведения принадлежат новому конусу $Cone(\Delta_i)$, но не принадлежат пересечению этого конуса со старыми конусами $Cone(\Delta_1), \ldots Cone(\Delta_{i-1})$. Значит эти произведения принадлежат Ash_i и потому представимы согласно утверждению 32. Доказательство утверждения (a) теоремы 4 завершено. □

8. Основная теорема

Доказательства в данном разделе имеют рутинный характер и в основном повторяют рассуждения, как проведенные, так и опущенные в моей работе 1976 года [4], опубликованной на французском языке. На русском эти доказательства не публиковались, на английском впервые были опубликованы в моей статье [8] в 2022 году. В доказательствах используется факт регулярности последовательности элементов алгебры $\mathbb{A}$, заданный формулами (72) и вытекающие из него по теореме 3 следствия. Сформулируем основную теорему, не опуская деталей.

8.1. Подробная формулировка основной теоремы

Теорема 5. ***(Основная теорема).*** *Фиксируем*

- выпуклый сверх-удобный целочисленный симплициальный многогранник $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$,

- построенное по этому многограннику число $\mu(\Gamma) = d! \times Volume(\Gamma)$,

- поле $\mathbb{K}$ характеристики 0,

- исчерпывающую возрастающую фильтрацию Ньютона в K-алгебре $\mathbb{K}[Z^d]$, эту K-алгебру мы для краткости обозначим через A:

$$A = \bigcup_{0 \le i} A_i, \text{ где } \mathbb{K} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

- натуральное число M, определяемое тем условием, что мономы, отвечающие вершинам многогранника Γ, принадлежат $A_M \backslash A_{M-1}$,

- исчерпывающую $\mathbb{N}$-фильтрацию в свободном A-модуле A^d, образованном наборами из d элементов алгебры A, определенную соотношениями

$$(A^d)_0 = (A^d)_1 = \dots = (A^d)_{M-1} = 0;$$

для $k \ge M$ $(A^d)_k = (A_{k-M})^d$

- ассоциированную с фильтрацией Ньютона $\mathbb{N}$-градуированную алгебру $gr(\mathbb{K}[Z^d])$, которая для краткости будет обозначаться $\mathbb{A}$,

- $\mathbb{N}$-градуировку свободного модуль $\mathbb{A}^d$, образованного наборами из d элементов алгебры $\mathbb{A}$, определенную соотношениями

$$(\mathbb{A}^d)_0 = (\mathbb{A}^d)_1 = \dots = (\mathbb{A}^d)_{M-1} = 0;$$

для $k \ge M$ $(\mathbb{A}^d)_k = (\mathbb{A}_{k-M})^d$

- определение ньютоновской степени элемента $g \in A$, корректное ввиду того, что фильтрация Ньютона исчерпывающая:

для ненулевого элемента $deg(g) = min\{n : g \in A_n\}$

для нулевого элемента $deg(0) = -\infty$

- определение ***ведущего_члена*** *ненулевого элемента $v \in A$ фильтрованной алгебры, этот ведущий_член обозначается $\hat{v}$, принадлежит $\mathbb{A}_k$, где $k = deg(v)$, и определяется формулой*

$$\hat{v} = v + A_{k-1} \in A_k/A_{k-1} = \mathbb{A}_k.$$

- шеллинг sh многогранника Γ,

- построенное по сверх-удобному симплициальному многограннику Γ и его шеллингу sh конечное множество

$$\mathbb{B}^{sh} = \bigcup_{1 \le j \le \mu(\Gamma)} b_j \subset \mathbb{Z}^d,$$

содержащее точку 0 и не содержащее точек ньютоновской степени выше dM,

- множество мономов в фильтрованной алгебре $\mathbb{K}[Z^d]$), состоящее из элементов

$$m_1 = x^{b_1} = x^0,\, m_2 = x^{b_2},\, \dots,\, m_\mu = x^{b_\mu}$$

- множество мономов в градуированной алгебре $\mathbb{A}$, состоящее из элементов

$$\hat{m}_1,\, \hat{m}_2,\, \dots,\, \hat{m}_\mu$$

- конечномерное линейное пространство $W \subset A^d$ d-наборов многочленов Лорана с носителями, принадлежащими многограннику Γ

- конечномерное линейное пространство $\mathbb{W} \subset \mathbb{A}^d$ d-наборов многочленов Лорана с носителями, принадлежащими границе $\partial\Gamma$ многогранника Γ.

- линейное отображение ***Ведущие_члены:*** *$W \to \mathbb{W}$ конечномерных линейных пространств, которое вычеркивает из каждой компоненты набора полиномов Лорана одночлены, соответствующие внутренним точкам многогранника Γ, оставляя только члены ньютоновской степени M, соответствующие мономам с показателями степени, лежащими на границе многогранника Γ.*

Тогда

(a) Существует открытое по Зарисскому непустое подмножество $\mathcal{NS}_{codim} \subset \mathbb{W}$ такое, что для любого набора многочленов $[G_1, G_2, \dots, G_d] \in \mathcal{NS}_{codim}$ идеал $(G_1, G_2, \dots, G_d)$, порожденный элементами набора в алгебре $\mathbb{A}$, имеет конечную коразмерность, равную $\mu(\Gamma)$ и любой элемент $\mathbb{A}$ степени, большей dM, принадлежит идеалу $(G_1, G_2, \dots, G_d)$;

(b) для любого набора многочленов $[g_1, g_2, \dots, g_d] \in W$ такого, что набор из их граничных членов $[G_1, G_2, \dots, G_d]$ принадлежит упомянутому в пункте (a) множеству $\mathcal{NS}_{codim}$, идеал $(g_1, g_2, \dots, g_d) \subset \mathbb{K}[Z^d]$ имеет конечную коразмерность, равную $\mu(\Gamma)$.

(c) Существует открытое по Зарисскому непустое подмножество $\mathcal{NS}_{basis} \subset \mathbb{W}$ такое, что для любого набора $[G_1, G_2, \dots, G_d] \in$

$\mathcal{NS}_{basis}$ классы эквивалентности мономов $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_\mu$ образуют базис над K фактор-алгебры

$$\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(G_1, G_2, \dots, G_d)$$

(d) для любого набора многочленов $[g_1, g_2, \dots, g_d] \in W$ такого, что набор из их граничных членов $[G_1, G_2, \dots, G_d]$ принадлежит упомянутому в пункте (c) множеству $\mathcal{NS}_{basis}$, идеал $(g_1, g_2, \dots, g_d) \subset \mathbb{K}[Z^d]$ имеет конечную коразмерность, равную $\mu(\Gamma)$ и классы эквивалентности мономов $m_1, m_2, \dots, m_\mu$ образуют базис над $\mathbb{K}$ фактор-алгебры

$$\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \dots, g_d)$$

Замечание. Сокращение $\mathcal{NS}$ нужно расшифровывать как $\boldsymbol{N}on\boldsymbol{S}ingular$. Утверждения (b) и (d) можно переформулировать так.

Теорема 6. *Пусть задан выпуклый сверх-удобный целочисленный симплициальный многогранник Γ и поле $\mathbb{K}$ характеристики 0. Тогда*
(b) для полиномов Лорана общего положения $g_1, g_2, \dots, g_d$, носители которых принадлежат многограннику Γ, коразмерность идеала $(g_1, g_2, \dots, g_d)$, порожденного этими полиномами в $\mathbb{K}$-алгебре $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$ равна $d! \times Volume(\Gamma)$,
(d) по каждому шеллингу выпуклого, сверх-удобного целочисленного симплициального многогранника Γ может быть явно построено множество мономов

$$m_1, m_2, \dots, m_\mu,$$

где $\mu = d! \times Volume(\Gamma)$, такое, что для полиномов Лорана общего положения $g_1, g_2, \dots, g_d$, носители которых принадлежат многограннику Γ, идеал $(g_1, g_2, \dots, g_d) \subset \mathbb{K}[Z^d]$ имеет конечную коразмерность, равную $\mu(\Gamma)$ и классы эквивалентности мономов $m_1, m_2, \dots, m_\mu$ образуют базис фактор-алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \dots, g_d)$.

8.1.1. Доказательство части (a) теоремы 5 – конечность коразмерности идеала общего положения в градуированной алгебре $\mathbb{A}$

Набросок доказательства. Однородный идеал $(F_1, F_2, \dots, F_d)$ является образом отображения $\mathbb{A}^d \xrightarrow{d_1} \mathbb{A}$ заданного формулой

$$d_1(H_1, H_2, \dots, H_d) = (H_1F_1 + H_2F_2 + \ldots + H_dF_d)$$

Это отображение бесконечномерных линейных пространств сводится к семейству отображений конечномерных линейных пространств

$$(\mathbb{A}_{n-M})^d \xrightarrow{d_1(n)} \mathbb{A}_n, \text{ где } n \geq M$$

В базисах, определяемых мономами, каждое конечномерное отображение $d_1(n)$ задается своей матрицей, коэффициенты которой линейно зависят от коэффициентов многочленов Лорана $F_1, F_2, \dots, F_d$ ньютоновской степени M, эти коэффициенты образуют конечномерное линейное пространство, которое мы обозначили $\mathbb{W}$. Однородный идеал $(F_1, F_2, \dots, F_d)$ имеет конечную коразмерность, если и только если для всех n, кроме конечного числа, однородная компонента $\mathbb{A}_n$ алгебры $\mathbb{A}$ принадлежит идеалу, иными словами, матрица отображения $d_1(n)$ имеет максимально возможный ранг, равный $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{A}_n)$. Из теоремы 4 о регулярности явно выписанной последовательности (72) и того факта, что ряд Пуанкаре фактор-алгебры, порожденной этой регулярной последовательностью, является многочленом степени dM, вытекает, что существует по меньшей мере одна точка в пространстве $\mathbb{W}$ для которой все подпространства $\mathbb{A}_n$ с номерами, большими dM, лежат в идеале $(F_1, F_2, \dots, F_d)$ и, значит, все соответствующие матрицы имеют максимальный ранг. Фиксируем число $n \in (dM, 2dM]$ и однородную компоненту $\mathbb{A}_n$. Обозначим через $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{W}$ множество таких элементов линейного пространства $\mathbb{W}$, для которых однородная компенента $\mathbb{A}_n$ алгебры $\mathbb{A}$ не принадлежит идеалу $(F_1, F_2, \dots, F_d)$ ($\mathcal{S}$ от Singular). По известной теореме линейной алгебры, для немаксимальности ранга матрицы, задающей отображение

$$(\mathbb{A}_{n-M})^d \xrightarrow{d_1} \mathbb{A}_n$$

необходимо и достаточно обращение в нуль всех миноров этой матрицы максимальной размерности. То есть необходимо и достаточно выполнение некоторого алгебраического условия на коэффициенты матрицы, а значит и на коэффициенты многочленов $F_1, F_2, \dots, F_d$. Таким образом $\mathcal{S}_n$ является замкнутым по Зарисскому подмножеством $\mathbb{W}$. Дополнение к этому подмножеству непусто, поскольку оно содержит точку (72). Положим

$$\mathcal{S}_{codim} = \bigcup_{dM < n \leq 2dM} \mathcal{S}_n \qquad (88)$$
$$\mathcal{NS}_{codim} = \mathbb{W} \backslash \mathcal{S}_{codim}$$

Открытое по Зарисскому множество $\mathcal{NS}_{codim}$ непусто, поскольку оно содержит точку (72). Докажем теперь, что наборы многочленов из множества $\mathcal{NS}_{codim}$ порождают идеалы конечной коразмерности. Для этого докажем, что идеал, построенный по набору из множества $\mathcal{NS}_{codim}$ содержит все мономы ньютоновой степени, большей $2dM$. А для этого достаточно доказать, что любой такой моном делится на некоторый моном, принадлежащий идеалу, а именно на моном, ньютоновская степень которого лежит в диапазоне $(dM, 2dM]$.

Утверждение 33. *Любой моном в* $\mathbb{A}$ *ньютоновской степени, большей* $2dM$, *делится на некоторый моном, степень которого лежит в диапазоне* $(dM, 2dM]$.

Доказательство. Согласно утверждению 16, любой моном $m \in \mathbb{A}$ может быть представлен в виде $m = bw_1w_2\cdots w_k$, где степень монома b лежит в диапазоне $[0, dM]$, а все остальные мономы имеют степень M. Поскольку степень монома m больше $2dM$, произведение $bw_1w_2\cdots w_k$ не сводится к моному b. Отщепляя от правого конца этого произведения группы по d мономов степени M, то есть последовательно уменьшая степень произведения на dM, мы рано или поздно получим произведение $bw_1w_2\cdots w_l$, степень которого лежит в полуинтервале $(dM, 2dM]$ длины dM, то есть получим разложение

$$m = (bw_1w_2\cdots w_l)(w_{l+1}\cdots w_k)$$

в котором степень первого сомножителя лежит в требуемом диапазоне $(dM, 2dM]$. Доказательство утверждения 33 закончено. □

Итак, для любого набора $[F_1, F_2, \ldots, F_d] \in \mathcal{NS}_{codim}$ идеал, порожденный элементами этого набора, содержит все мономы степени, большой $2dM$. То есть конечна коразмерность идеала, порожденного последовательностью из d элементов в конечно-порожденной градуированной алгебре $\mathbb{A}$ размерности d. Но предъявив одну регулярную последовательность (72) мы доказали, что $\mathbb{A}$ является алгеброй Коэна-Маколея (теорема 4 раздела 7.1.). Поэтому, согласно теореме 3, последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_d$ регулярна и ряд Пуанкаре фактор-алгебры по идеалу, порожденному d однородными элементами степени M дается формулой

$$H(\mathbb{A}/(F_1, F_2, \ldots, F_d), t) = h(\mathbb{A}, t)(1 - t^M)^d = Q(t),$$

причем, согласно результатам раздела 2.4.2., $deg(Q) = dM, Q(1) = \mu(\Gamma)$. Отсюда вытекает, что для любого d-набора $[F_1, F_2, \ldots, F_d] \in \mathcal{NS}_{codim}$ коразмерность идеала $(F_1, F_2, \ldots, F_d)$ равна $\mu(\Gamma)$ и все мономы алгебры $\mathbb{A}$ степени, большей dM, принадлежат идеалу.

Доказательство части (а) основной теоремы закончено. □

8.1.2. Набросок доказательства утверждения (b) – поднимаем базис градуированной фактор-алгебры в фильтрованную фактор-алгебру

Набросок доказательства. Пусть $[g_1, g_2, \ldots, g_d] \in W$ такой набор многочленов, что

Ведущие_члены $([g_1, g_2, \ldots, g_d]) \in \mathcal{NS}_{codim}$. Обозначим этот набор ведущих членов через $[G_1, G_2, \ldots, G_d]$. Согласно части (а) теоремы 5 идеал $(G_1, G_2, \ldots, G_d)$ имеет конечную коразмерность, равную $\mu(\Gamma)$. Для краткости обозначим эту коразмерность μ. Фактор-алгебра $\mathbb{A}/(G_1, G_2, \ldots, G_d)$ имеет над K размерность μ и, значит, имеет базис из μ элементов, скажем $[E_1, E_2, \ldots, E_\mu]$. Легко видеть, что в качестве элементов такого базиса можно выбрать классы эквивалентности некотороых однородных элементов алгебры $\mathbb{A}$. А поскольку каждый ненулевой однородный элемент алгебры $\mathbb{A}$ является ведущим членом некоторого ненулевого элемента алгебры A, в фильтрованной алгебре A многочленов Лорана могут быть найдены такие элементы $(e_1, e_2, \ldots, e_\mu)$, что $[E_1, E_2, \ldots, E_\mu] = [\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_\mu]$. Утверждение (b) теоремы 5 будет доказано, если нам удастся установить два свойства этих элементов $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$.

Утверждение 34. *Классы эквивалентности элементов* $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ *порождают фактор-алгебру* $A/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$.

Утверждение 35. *Классы эквивалентности элементов* $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ *линейно независимы в фактор-алгебре* $A/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$.

Переформулируем утверждение 34 в удобных обозначениях

Утверждение 36. *(Условие) Предположим, что идеал* $(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \ldots, \hat{g}_d) \subset \mathbb{A}$ *имеет конечную коразмерность и классы эквивалентности элементов* $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_\mu$ *образуют базис фактор-алгебры* $\mathbb{A}/(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \ldots, \hat{g}_d)$.
(Заключение) Тогда имеет конечную коразмерность идеал $(g_1, g_2, \ldots, g_d) \subset A$ *и классы эквивалентности элементов* $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ *порождают фактор-алгебру* $A/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$.

Доказательство утверждения 36. Достаточно доказать, что произвольный элемент $e \in A$ представим в виде

$$e = \sum_{1 \le i \le d} h_i g_i + \sum_{1 \le j \le \mu} \lambda_j e_j, \text{ где } h_i \in A,\ \lambda_j \in \mathbb{K} \quad (89)$$

Элемент 0 очевидно представим. Объединение нуля и ненулевых элементов нулевой ньютоновской степени алгебры A образует одномерное линейное пространство, порожденное единичным мономом. Ведущий член этого монома обязательно входит в мономиальный базис любой фактор-алгебры по идеалу, порожденному элементами положителных степеней. Поэтому можно считать, что при выполнении *Условия* утверждения 34 в качестве e_1 можно выбрать единичный моном и потому любой элемент алгебры A нулевой ньютоновской степени представим в форме (89).

Для произвольного элемента $e \in A$ положительной ньютоновской степени существует $k \le deg(e)$, такое, что элемент e представим приближенно, с точностью до некоторого поправочного члена $r_k \in A_k$, в виде

$$e = \sum_{1 \le i \le d} h_i g_i + \sum_{1 \le j \le \mu} \lambda_j e_j + r_k, \quad \text{где } r_k \in A_k,\ h_i \in A,\ \lambda_j \in \mathbb{K} \quad (90)$$

Действительно, существует тривиальное представление вида (90), в котором k равно ньютоновской степени элемента e, в качестве поправочного члена r_k взят сам элемент e, а остальные слагаемые выбраны нулевыми.

Выберем среди непустого множества всевозможных представлений элемента e вида (90) какое-нибудь представление с минимальной ньютоновской степенью поправочного члена r_k. Докажем, что эта минимальная ньютоновская степень равна $-\infty$, тем самым мы докажем, что существует точное представление монома e вида (89). Таким образом, для доказательства существования точного представления элемента e вида (89) достаточно для любого представления элемента e вида (90) с ненулевым поправочным членом r_k построить более точное представление с меньшей ньютоновской степенью поправочного члена.

Доказательство возможности понижения ньютоновской степени поправочного члена в приближенном представлении (90). Рассмотрим элемент $r_k \in A_k$, входящий в представление (90) и соответствующий элемент $\hat{r}_k \in \mathbb{A}_k$. По *Условию* утверждения 36 элемент $\hat{r}_k$, как и всякий элемент алгебры $\mathbb{A}$, представляется в виде:

$$\hat{r}_k = \sum_{1 \le i \le d} \hat{p}_i \hat{g}_i + \sum_{1 \le j \le \mu} \beta_j \hat{e}_j, \quad \text{где } p_i \in A_k,\ \hat{p}_i = p_i + A_{k-1} \in \mathbb{A}_k,\ \beta_j \in \mathbb{K} \quad (91)$$

При $k > 0$ из (91) вытекает, что

$$r_k = \sum_{1 \le i \le d} p_i g_i + \sum_{1 \le j \le \mu} \beta_j e_j + r_{k-1}, \quad \text{где } r_{k-1} \in A_{k-1},\ p_i \in A_k,\ \beta_j \in \mathbb{K} \quad (92)$$

Подставляя найденное выражение для поправочного члена r_k в (90) получаем новое приближенное представление элемента e с поправочным членом r_{k-1} меньшей ньютоновской степени

$$\begin{aligned} e = &\sum_{1 \le i \le d} h_i g_i + \sum_{1 \le j \le \mu} \lambda_j e_j + \\ &\sum_{1 \le i \le d} p_i g_i + \sum_{1 \le j \le \mu} \beta_j e_j + r_{k-1} = \\ &\sum_{1 \le i \le d} (h_i + p_i) g_i + \sum_{1 \le j \le \mu} (\lambda_i + \beta_j) e_j + r_{k-1}, \end{aligned}$$
$$\text{где } r_i \in A_{k-1},\ h_i + p_i \in A,\ \lambda_i + \beta_j \in \mathbb{K} \quad (93)$$

При $k = 0$ поправочный член r_0 пропорционален e_1 и изменение члена $\lambda_1 e_1$ превращает приближенное представление (90) в точное представление (89). Утверждение 36 доказано □. Тем самым доказано и утверждение 34 □.

Для доказательства утверждения (b) теоремы 5 остается доказать утверждение 35. Это доказательство и есть наиболее сложный этап доказательства утверждения (b) теоремы 5. На этом этапе нам потребуются два факта, относящиеся к фильтрованным и градуированным объектам и регулярным последовательностям:

- достаточное условие строгости отображения фильтрованных модулей (определение 21 и утверждение 38 ниже),
- известная теорема об обращении в нуль гомологий размерности 1 комплекса Кошуля регулярной последовательности однородных элементов положительных степеней конечно-порожденной градуированной алгебры над полем характеристики 0, см. например, [32, Theorem 06.]

Доказательство утверждения 35. Нам необходимо доказать, что если некоторая линейная комбинация

$$z = \sum_{1 \le j \le \mu} \lambda_j e_j, \text{ где } \lambda_j \in \mathbb{K} \quad (94)$$

принадлежит идеалу $(g_1, g_2, \dots, g_d)$, то есть z представляется в виде

$$z = \sum_{1 \le i \le d} h_i g_i, \text{ где } h_i \in A \qquad (95)$$

то эта комбинация z тривиальна, то есть:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_\mu = 0 \qquad (96)$$

Докажем (96) от противного. Если хотя бы один коэффициент в линейной комбинации (94) отличен от нуля, то ведущий член $\hat{z}$ элемента z есть некоторая нетривиальная линейная комбинация представителей базисных векторов фактор-алгебры $\mathbb{A}/(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_\mu)$. Ввиду своей нетривиальности эта линейная комбинация базисных векторов отлична от нуля. Значит и элемент z отличен от нуля и потому имеет конечную ньютоновскую степень k. Вычислим ведущий член элемента z ньютоновской степени k двумя способами, используя представление z формулой (94) или формулой (95).

Первый способ. Из формулы (94) вытекает, что $\hat{z}$ есть нетривиальная линейная комбинация тех элементов $\hat{e}_j$, для которых ньютонова степень e_j равна k:

$$\hat{z} = \sum_{deg(e_j)=k} \lambda_j \hat{e}_j, \text{ где } \lambda_j \in \mathbb{K} \qquad (97)$$

Второй способ. Начнем с представления (95). Само по себе оно нам ничего не дает, так как в нем могут участвовать множители $h_1, h_2, \dots, h_d$ сколь угодно высоких ньютоновских степеней. Однако ниже мы докажем, что из существования какого-нибудь представления (95) элемента z ньютоновской степени k, а такое представление нами уже получено, следует существование такого представления, в котором каждый из элементов $h_1, h_2, \dots, h_d$ принадлежат A_{k-M}:

$$z = \sum_{1 \le i \le d} h_i g_i, \text{ где } h_i \in A_{k-M} \qquad (98)$$

Поэтому вычисление ведущего члена элемента z исходя из формулы (98) дает

$$\hat{z} = \sum_{1 \le i \le d} h_i \hat{g}_i, \text{ где } h_i \in \mathbb{A}_{k-M} \qquad (99)$$

Сравнивая представления (97) и (99) элемента $\hat{z}$ градуированной алгебры $\mathbb{A}$ получаем, что нетривиальная линейная комбинация представителей базисных векторов фактор-алгебры $\mathbb{A}/(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_\mu)$ принадлежит идеалу $(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_\mu)$. То есть из отрицания (96) мы вывели существование нетривиального линейного соотношения между базисными векторами фактор-алгебры. Полученное противоречие доказывает равенство (96).

Доказательство существования представления (98). A^d и A можно рассматривать как фильтрованные модули над фильтрованной по Ньютону $\mathbb{K}$-алгеброй A. Идеал $(g_1, g_2, \dots, g_d)$ можно рассматривать как образ отображения

$$A^d \xrightarrow{\partial_1} A \qquad (100)$$

фильтрованных модулей, где ∂_1 задается формулой

$$\partial_1(h_1, h_2, \dots, h_d) = (h_1 g_1 + h_2 g_2 + \dots + h_d g_d)$$

Существование представления (98) в терминах отображений фильтрованных модулей вытекало бы из соотношения

$$\partial_1(A^d) \cup A_k = \partial_1((A^d)_k) \text{ для любого } k \in \mathbb{N} \qquad (101)$$

если бы нам удалось его установить. В терминах отображений фильтрованных модулей выполнение соотношения (101) называется *строгостью* отображения ∂_1. Поэтому для завершения доказательства существования представления (98), а значит, и для завершения доказательства утверждения 35, а значит, и для завершения доказательства утверждения (b) теоремы 5, осталось доказать строгость отображения ∂_1. Это доказательство использует известное достаточное условие строгости и факт регулярности последовательности $g_1, g_2, \dots, g_d$ для полиномов общего положения, доказанный в работе [4] в общем случае и передоказанный в настоящей работе для симплициальных многогранников Ньютона.

Доказательство соотношения (101).

Определение 21. *Отображение $\mathbb{N}$-фильтрованных модулей*

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{Z}$$

называется ***строгим****, если*

$$\partial_1(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{Z}_k = \partial_1(\mathcal{Y}_k) \text{ для любого } k \in \mathbb{N} \qquad (102)$$

Утверждение 37. *Пусть $\mathcal{Y} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{Z}$ строгое отображение фильтрованных модулей. Тогда,*

$$gr(\mathcal{Z}/\partial_1(\mathcal{Y})) = gr(\mathcal{Z})/gr(\partial_1)(gr(\mathcal{Y}))$$

Доказательство следует из определения градуированных объектов и отображений, ассоциированных с фильтрованными объектами и отображениями. $\square$

Утверждение 38. ***Достаточное условие строгости отображения фильтрованных модулей.*** *Пусть*

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{Y} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{Z}$$

комплекс фильтрованных модулей, то есть каждое из отображений ∂_2 и ∂_1 уважает фильтрацию и композиция этих отображений равна нулю. Обозначим

$$gr(\mathcal{X}) = X,\ gr(\mathcal{Y}) = Y,\ gr(\mathcal{Z}) = Z,\quad gr(\partial_2) = d_2,\ gr(\partial_1) = d_1 \tag{103}$$

Предположим, что $\mathcal{Y} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_k$ и последовательность

$$X \xrightarrow{d_2} Y \xrightarrow{d_1} Z \tag{104}$$

точна. Тогда отображение ∂_1 является строгим отображением фильтрованных модулей.

Отложим на мгновение доказательство утверждения 38 и применим его в одной необходимой нам ситуации.

Пример применения утверждения 38 к комплексу Кошуля регулярной последовательности элементов ассоциированной градуированной $\mathbb{K}$-алгебры $\mathbb{A}$. Рассмотрим A^d и A как фильтрованные модули над фильтрованной по Ньютону $\mathbb{K}$-алгеброй A. Рассмотрим два набора $[g_1, g_2, \dots, g_d] \in A^d$ и $[G_1, G_2, \dots, G_d] \in \mathbb{A}^d$ таких, что

$[G_1, G_2, \dots, G_d] =$ ***Ведущие_члены***$([g_1, g_2, \dots, g_d])$
и последовательность
$(G_1, G_2, \dots, G_d)$ регулярна.

Идеал $(g_1, g_2, \dots, g_d) \subset A$ может рассматриваться, как образ отображения ∂_1 фильтрованных модулей

$$A^d \xrightarrow{\partial_1} A \tag{105}$$

заданного формулой

$$\partial_1(h_1, h_2, \dots, h_d) = (h_1 g_1 + h_2 g_2 + \dots + h_d g_d)$$

Последовательность отображений (105) может быть продолжена вправо естественной проекцией алгебры на фактор-алгебру

$$A^d \xrightarrow{\partial_1} A \to A/(g_1, g_2, \dots, g_d) \tag{106}$$

Последовательность отображений (106) может быть продолжена влево как фрагмент комплекса Кошуля последовательности $g_1, g_2, \dots, g_d$ элементов алгебры A

$$A^{\binom{d}{2}} \xrightarrow{\partial_2} A^d \xrightarrow{\partial_1} A \to A/(g_1, g_2, \dots, g_d) \tag{107}$$

Перейдем теперь от фильтрованных объектов и отображений к градуированным. Ясно, что ассоциированными градуированными модулями фильтрованных модулей $A^{\binom{d}{2}}$, A^d, and A будут модули $\mathbb{A}^{\binom{d}{2}}$, $\mathbb{A}^d$, and $\mathbb{A}$. Последовательность фильтрованных объектов (107) порождает некоторую последовательность градуированных объектов, а именно фрагмент комплекса Кошуля последовательности $G_1, G_2, \dots, G_d$ элементов алгебры $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}^{\binom{d}{2}} \xrightarrow{d_2} \mathbb{A}^d \xrightarrow{d_1} \mathbb{A} \to \mathbb{A}/(G_1, G_2, \dots, G_d) \tag{108}$$

Тем самым, в предположении регулярности последовательности $(G_1, G_2, \dots, G_d)$ мы можем применить теорему об обращении в нуль гомологий размерности 1 комплекса Кошуля регулярной последовательности однородных элементов положительных степеней конечно-порожденной градуированной алгебры над полем характеристики 0, см. например, [32, Theorem 06.] и применить утверждение 38 к первым трем элементам последовательности градуированных модулей (107) и к трем элементам последовательности (106) что докажет *строгость* отображение ∂_1 в формуле (100). Существенный ингредиент доказательства строгости отображения ∂_1 в формуле (100), это регулярность последовательности $(G_1, G_2, \dots, G_d)$, которая обеспечивается утверждением (a) основной теоремы (main.a).

Доказательство утверждения 38. Мы должны доказать соотношение (102). Рассмотрим ненулевой элемент z в правой части этого соотношения, то есть элемент $z \in \partial(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{Z}_k$. Поскольку $\mathcal{Y} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_k$, существуют $l \geq k$ и элемент $y \in \mathcal{Y}_l$ такие что $\partial_1 y = z \in \mathcal{Z}_k$. Положим

$$k_1 = min\{n \in \mathbb{N} : n \geq k,\ z \in \partial_1(\mathcal{Y}_n)\}.$$

Множество в фигурных скобках непусто, так как содержит число l, поэтому число k_1 корректно определено. Докажем, что $k_1 = k$. Предположим, что $k_1 > k$. Это означает, что существует $y_1 \in \mathcal{Y}_{k_1}$ такое, что $\partial_1 y_1 = z$. Значит

$$\partial_1(y_1 + \mathcal{Y}_{k_1-1}) \subseteq z + \mathcal{Z}_{k_1-1} \subseteq \mathcal{Z}_{k_1}$$

Ввиду точности последовательности (104) существует элемент $x \in \mathcal{X}_{k_1}$ такой, что

$$\partial_2(x + \mathcal{X}_{k_1-1}) \subseteq y_1 + \mathcal{Y}_{k_1-1}$$

Отсюда вытекает, что $y_1 - \partial_2 x \in \mathcal{Y}_{k_1-1}$ и

$$\partial_1(y_1 - \partial_2 x) = \partial_1 y_1 = z$$

То есть мы представили z как образ точки из множества $\mathcal{Y}_{k_1-1}$, что противоречит определению k_1. $\square$

Завершение доказательства утверждения (main.b). Фиксируем набор $[G_1, G_2, \dots, G_d] \in \mathcal{NS}_{codim} \subset \mathbb{W}$. Пусть $[g_1, g_2, \dots, g_d]$ такой элемент W, что

$$[\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_d] = [G_1, G_2, \dots, G_d] \in \mathbb{W}$$

Согласно утверждению (main.a), последовательность $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_d$ порождает в $\mathbb{A}$ идеал конечной коразмерности, равной $\mu(\Gamma)$. Следовательно, по теореме 3, последовательность $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_d$ регулярна. Известно, см., например, Theorem 06 в [32], что комплекс Кошуля регулярной последовательности $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_d$ однородных элементов конечно порожденной градуированной $\mathbb{K}$ – алгебры ацикличен в положительных размерностях, в частности, он ацикличен в размерности 1. Следовательно, последовательность

$$\mathbb{A}^{\binom{d}{2}} \xrightarrow{d_2} \mathbb{A}^d \xrightarrow{d_1} \mathbb{A} \to \mathbb{A}/(G_1, G_2, \dots, G_d)$$

точна в члене $\mathbb{A}^d$. Из предложения 38 следует, что отображение ∂_1 в формуле (107) является строгим. Согласно предложению 37 это означает, что размерность фактор-алгебры $A/(g_1, g_2, \dots, g_d)$ равна $\mu(\Gamma)$. Доказательство утверждения (main.b) завершено. $\square$

8.1.3. Доказательство утверждения (main.c)

Из утверждения 18(i) следует, что множество Γ^{sh} содержит interior(Γ), поэтому конечное множество $\mathbb{B}^{sh}$ содержит все целые точки $\mathbb{Z}^d$ ньютоновской степени, меньшей M. Условия теоремы 5 описывают конечное множество мономов

$$\{m_1, m_2, \dots, m_\mu\} \subset A$$

Рассмотрим главные члены этих мономов $\{\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_\mu\}$ Их классы эквивалентности образуют базис фактор-алгебры $\mathbb{A}/(f_1, f_2, \dots, f_d)$ по крайней мере для одного набора полиномов Лорана, а именно для кортежа (72). Обозначим через $\mathcal{M}$ множество мономов

$$\{\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_\mu\}$$

Это множество содержит все мономы степени Ньютона, меньшие M, не содержит ни одного монома степени Ньютона, большей dM, и содержит некоторые мономы степень Ньютона которых лежит в диапазоне $[M, dM]$. Для $n \in [M, dM]$ обозначим через $Bspace_n \subset \mathbb{A}_n$ векторное пространство, натянутое на все мономы степени Ньютона n, а через $p_n : \mathbb{A}_n \mapsto \mathbb{A}_n/Bspace_n$ — проекцию на факторпространство. Приведенные ниже рассуждения будут аналогичны доказательству утверждения (main.a). Однородный идеал $(G_1, G_2, \dots, G_d)$ — это образ отображения $\mathbb{A}^d \xrightarrow{d_1} \mathbb{A}$, заданный формулой

$$d_1(H_1, H_2, \dots, H_d) = (H_1 G_1 + H_2 G_2 + \ldots + H_d G_d)$$

Это отображение бесконечномерных векторных пространств сводится к семейству отображений конечномерных векторных пространств

$$(\mathbb{A}_{n-M})^d \xrightarrow{d_{1,n}} \mathbb{A}_n, \text{ где } n \geq M$$

Построим для каждого $n \in [M, DM]$ композицию отображений

$$(\mathbb{A}_{n-M})^d \xrightarrow{d_{1,n}} \mathbb{A}_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{A}_n/Bspace_n, \text{ где } n \in [M, dM]$$

Обозначим композицию отображений $d_{1,n} \circ p_n$ через $composition_n$. Каждая композиция является линейным отображением конечномерных векторных пространств. В базисах, определяемых мономами, каждое линейное отображение $composition_n$ задается своей матрицей, коэффициенты которой линейно зависят от коэффициентов полиномов Лорана в кортеже $[G_1, G_2, \dots, G_d] \in \mathbb{W}$. Фактор любой однородная компонента $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{A}$ по модулю образа $d_{1,n}$ порожден базисными мономами тогда и только тогда, когда прямоугольная матрица $composition_n$ имеет максимально возможный ранг. Существует по крайней мере один кортеж, для которого матрицы всех композиций $composition_n$, где $n \in [M, dM]$, имеют максимально возможный ранг.

Согласно известной теореме линейной алгебры, для того чтобы ранг прямоугольной матрицы был немаксимальным, необходимо и достаточно, чтобы все миноры этой матрицы максимальной размерности обращались в нуль. То есть необходимо и достаточно, чтобы выполнялось конечное число алгебраических условий на коэффициенты матрицы.

При доказательстве (main.a) мы построили в векторном пространстве $\mathbb{W}$ конечное число замкнутых по Зарисскому множеств $\mathcal{S}_j$, где $j \in (dM, 2dM]$. Обозначим дополнение к этим подмножествам в $\mathbb{W}$ через $\mathcal{NS}_{codim}$. Для доказательства утверждения (main.c) дополнительно определим в $\mathbb{W}$ замкнутые по Зарисскому множества $\mathcal{S}_n$, где $n \in [M, dM]$. Определим каждое из этих множеств $\mathcal{S}_n$ условием, что матрица отображения $composition_n$ имеет немаксимальный ранг. Как показано выше, каждое $\mathcal{S}_n$ является замкнутым по Зарисскому подмножеством $\mathbb{W}$, дополнение к которому непусто. Обозначим далее

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{basis} &= \mathcal{S}_{codim} \cup (\bigcup_{M \le n \le 2dM} \mathcal{S}_n) \\ \mathcal{NS}_{basis} &= \mathbb{W} \backslash \mathcal{S}_{basis} \end{aligned} \tag{109}$$

Рассмотрим кортеж $G = [G_1, G_2, \dots, G_d] \in \mathcal{NS}_{basis}$. Докажем, что фактор-алгебра $\mathbb{A}/(G_1, G_2, \dots, G_d)$ порождается классами эквивалентности мономов, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$. Кортеж F не принадлежит $\mathcal{S}_{codim}$. Поэтому, согласно (main.a), коразмерность идеала $(F_1, F_2, \dots, F_d)$ равна $\mu(\Gamma)$ и все элементы алгебры $\mathbb{A}$, степень которых больше dM, принадлежат идеалу. Другими словами, фактор-алгебра $\mathbb{A}/(F_1, F_2, \dots, F_d)$ порождается классами эквивалентности однородных элементов алгебры $\mathbb{A}$ степени $n \le dM$. Докажем, что каждый однородный элемент фактор-алгебры степени $n \le dM$ является линейной комбинацией представителей мономов множества $\mathcal{M}$.

Для любого $n < M$ однородная компонента $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{A}$ порождается мономами из множества $\mathcal{M}$. При этом дано, что кортеж F не принадлежит множеству $\mathcal{S}_n$. Поэтому по определению $\mathcal{S}_n$ любая однородная компонента $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{A}$ порождается базисными мономами по модулю образа $d_{1,n}$. Таким образом, мы доказали, что если кортеж F принадлежит непустому открытому множеству Зариского $\mathcal{NS}_{basis}$, то любой однородный элемент фактор-алгебры $\mathbb{A}/(F_1, F_2, \dots, F_d)$ ньютоновской степени $n \le dM$ разлагается по базису $\mathcal{M}$. Теперь рассмотрим однородные элементы степени $n > dM$. Поскольку по построению $\mathcal{NS}_{basis} \subset \mathcal{NS}_{codim}$, то из (main.a) следует, что все однородные элементы фактор-алгебры степени выше dM обращаются в нуль, и, следовательно, любой элемент фактор-алгебры разлагается по классам эквивалентности мономов множества $\mathcal{M}$. Поскольку мощность этого множества равна размерности фактор-алгебры, то классы эквивалентности мономов множества $\mathcal{M}$ образуют базис фактор-алгебры $\mathbb{A}/(F_1, F_2, \dots, F_d)$. Доказательство утверждения (main.c) завершено.

8.1.4. Доказательство утверждения (main.d)

Рассмотрим кортеж полиномов Лорана $[g_1, g_2, \dots, g_d] \in W$ такой, что кортеж ведущих членов этих полиномов $[\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_d]$ принадлежит множеству $\mathcal{NS}_{basis}$. Согласно (main.c), классы эквивалентности мономов $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_\mu$ образуют базис над K фактор-алгебры

$$\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_d)$$

Применим предложение 36, взяв в качестве $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_\mu$ мономы $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_\mu$. Получаем, что идеал $(g_1, g_2, \dots, g_d) \subset \mathbb{K}[Z^d]$ имеет конечную коразмерность, равную $\mu(\Gamma)$, а классы эквивалентности мономов $m_1, m_2, \dots, m_\mu$ образуют базис факторалгебры

$$\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \dots, g_d)$$

Доказательство утверждения (main.d) завершено.

9. Благодарности

Настоящая работа выполнена по теме FNEF-2024-0001 государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (регистрационный номер 1023032100070-3-1.2.1).

Работа ориентирована на использование в учебном процессе высших учебных заведений РФ в качестве методической поддержки компьютерных практикумов по выпуклой геометрии и алгебраической геометрии с использованием систем компьютерной алгебры. Поэтому доказательства изложены достаточно подробно, в стиле конспектов лекций для студентов 2 курса математических, компьютерных и инженерных специальностей. Работа является переработкой англоязычной публикации автора [8].

Arnold's Piecewise Linear Filtrations, Analogues of Stanley–Reisner Rings and Simplicial Newton Polyhedra

Anatoly Kushnirenko

Abstract. Estimating the number of solutions of polynomial systems of equations in terms of Newton polytopes, in 1974 the author proved that the codimension of the ideal $(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ generated in the group algebra $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$ over the field $\mathbb{K}$ of characteristic 0 by Laurent polynomials of general position having the same Newton polytope Γ is equal to $d! \times Volume(\Gamma)$.

Assuming that the Newton polyhedron is *simplicial* and *super-convenient* (i.e. containing some neighborhood of the origin), the author re-proves and strengthens the 1974 result by explicitly indicating the set $\mathbb{B}^{sh}$ of monomials whose equivalence classes form a basis for the quotient algebra $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$. It is proved that the cardinality of this set is equal to $d! \times Volume(\Gamma)$. By a well-known theorem of commutative algebra, it follows that in the case of an algebraically closed field $\mathbb{K}$ of characteristic 0, the number of solutions of the system of equations $g_1 = g_2 = \ldots = g_d = 0$, taking into account multiplicities, will be equal to $d! \times Volume(\Gamma)$.

The set $\mathbb{B}^{sh}$ has an analogue of the Dehn-Sommerville property and arises naturally in the process of calculating the Poincaré series of the linear space of Laurent polynomials equipped with the Arnold-Newton grading. The inductive construction of the set $\mathbb{B}^{sh}$ relies on the construction of the shelling sh whose existence for any convex polyhedron was proved in 1971 by Bruggerser and Money. Using the structure of $\mathbb{B}^{sh}$, we prove that the associated graded $\mathbb{K}$-algebra $gr^{\Gamma}(\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d])$ constructed from the Arnold-Newton piecewise linear filtration of the $\mathbb{K}$-algebra $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]$ has the Cohen-Macaulay property. Our proof of the Cohen-Macaulay property is a generalization of B. Kind and P. Kleinschmitt's 1979 proof of the Cohen-Macaulay property of the Stanley-Reisner rings of simplicial complexes admitting shelling. Using the Cohen-Macaulay property of $gr^{\Gamma}(\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d])$, we prove that for generic Laurent polynomials $(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ that have the same Newton polytope Γ, the set $\mathbb{B}^{sh}$ is a monomial basis of the quotient algebra $\mathbb{K}[\mathbb{Z}^d]/(g_1, g_2, \ldots, g_d)$.
The results of the paper can easily be extended to ordinary polynomials and formal series, which will be the subject of a separate publication.

Keywords: Newton polyhedra; shelling; Cohen–Macoley rings; Kushnirenko Theorem; Dehn–Sommerville relations; face rings.

Литература

1. В. И. Арнольд, Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек, УМН, 29:2(176) (1974), с. 11–49; Russian Math. Surveys, 29:2 (1974), pp.10–50 `https://www.mathnet.ru/links/803374d14c3fdbe7d67529c757f7fba3/rm4352.pdf`

2. А.Г. Кушниренко, Многогранник Ньютона и числа Милнора, Функц. анализ, том 9, вып. 1 (1975), с. 74-75 `https://www.mathnet.ru/links/329399444a7b795f6fd30180e0ff2644/faa2223.pdf`, DOI: `https://doi.org/10.1007/BF01078188`

3. А.Г. Кушниренко, Многогранники Ньютона и теорема Безу, Функц. анализ, том 10, вып. 3 (1976), с. 82-83 `https://www.mathnet.ru/links/5744b3b4585c5707364a9649a3845d9a/faa2179.pdf`, `DOI:https://doi.org/10.1007/BF01075534`

4. A.G. Kouchnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Inventiones mathematicae 32 (1976) pp. 1-32 `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01389769.pdf`

5. M.Hochster, Rings Invariants of Tori, Cohen-Macaulay Rings Generated by Monomials, and Polytopes, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 96, No. 2 (Sep., 1972), pp. 318-337, DOI: https://doi.org/10.2307/1970791

6. M.Hochster, Cohen-Macaulay Varieties, Geometric Complexes, and Combinatorics, http://www.math.lsa.umich.edu/~hochster/comb2.pdf

7. Merle, M.. Les anneaux coniques sont de Cohen-Macaulay, d'après A.G. Kouchnirenko. Séminaire sur les singularités des surfaces (1976-1977): 1-7. http://eudml.org/doc/114151

8. Anatoly Kushnirenko, Arnold's Piecewise Linear Filtrations, Analogues of Stanley–Reisner Rings and Simplicial Newton Polyhedra, Mathematics 2022, 10(23), 4445; https://doi.org/10.3390/math10234445

9. Э. Б. Винберг, М. Джибладзе, А. Г. Элашвили, Алгебры модулей некоторых неполуквазиоднородных особенностей, Функц. анализ и его прил., 51:2 (2017), 10–24; Funct. Anal. Appl., 51:2 (2017), 86–97 https://doi.org/10.4213/faa3450 https://doi.org/10.1007/s10688-017-0171-6

10. B. Kind and P. Kleinschmidt, Schälbare Cohen–Macaulay Komplexe und ihre Parametrisierung, Math. Z. 167(1979), pp. 173-179, https://eudml.org/doc/172845

11. Richard P. Stanley, A glimpse of combinatorial commutative algebra, www-math.mit.edu/~rstan/algcomb/chapter13.pdf

12. Richard P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra. Birkhäuser, 1983

13. H. Bruggesser and P. Mani, Shellable decompositions of cells and spheres, Math. Scand., 29 (1971), pp. 197-205, https://www.jstor.org/stable/24491028

14. Jean Gallier. Notes on Convex Sets, Polytopes, PolyhedraCombinatorial Topology, Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations. [Research Report], RR-6379, INRIA. 2007, pp.179, https://hal.inria.fr/inria-00193831v3

15. Arnold, V. I., Arnold's problems, Springer-Verlag, Berlin; PHASIS, Moscow (2004), http://www.vixri.ru/d2/Arnold%20V%20_Arnolds%20Problems%20,%20653str.pdf

16. Brzostowski, S., Krasi´nski, T., Walewska, J., Arnold's problem on monotonicity of the Newton number for surface singularities. J. Math. Soc. Japan 71:4 (2019), 1257–1268, arXiv:1705.00323

17. Fedor Selyanin, A non-negative analogue of the Kouchnirenko formula (2020), https://arxiv.org/pdf/2006.11795v1.pdf

18. Fedor Selyanin, Arnold's monotonicity problem, https://arxiv.org/pdf/2006.11795v3.pdf

19. Stapledon, A. Formulas for monodromy. Res Math Sci 4, 8 (2017). https://doi.org/10.1186/s40687-017-0097-x

20. Maximiliano Leyton-Álvarez, Hussein Mourtada, Mark Spivak, Newton non-degenerate μ-constant deformations admit simultaneous embedded resolutions, Compositio Mathematica, Volume 158 , Issue 6 , June 2022 , pp. 1268 – 1297 DOI: https://doi.org/10.1112/S0010437X22007576

21. Maximiliano Leyton-Álvarez, Hussein Mourtada, Mark Spivak, Newton non-degenerate μ-constant deformations admit simultaneous embedded resolutions, v5, arXiv:2001.10316v5, 2024, https://arxiv.org/abs/2001.10316v5

22. Alexander Barvinok, Lattice Points, Polyhedra, and Compexity. Lecture 3, Theorem 1, and Theorem 2, in Geometric Combinatorics / Ezra Miller, Victor Reiner, Bernd Sturmfels, editors. – IAS/ParkCity mathematics series, ISSN 1079-5634; v. 13, American Mathematical Soc., 2007. http://www.math.lsa.umich.edu/ barvinok/lectures.pdf

23. Günter M. Ziegler, Lectures on Polytopes (in Graduate Texts in Mathematics, Vol 152), Springer-Verlag New York, 1995.

24. Douai, A., Sabbah, C.: Gauss–Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures I. Ann. Inst. Fourier 53(4), 1055–1116 (2003), https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0211352

25. Douai, A.: A note on the Newton spectrum of a polynomial. arXiv:1810.03901, https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.03901

26. Douai, A. Ehrhart polynomials of polytopes and spectrum at infinity of Laurent polynomials. J Algebr Comb 54, 719–732 (2021). https://doi.org/10.1007/s10801-020-00984-x

27. A. Stapledon, Weighted Ehrhart theory and orbifold cohomology, Advances in Mathematics, Volume 219, Issue 1,10 September 2008, Pages 63-88,
DOI: `https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.04.010`

28. Stanley, R.P., Combinatorics and Commutative Algebra, 2nd ed.; Progress in Mathematics, 41; Birkhäuser Boston, Inc.: Boston, MA, USA, 1996; ISBN 0-8176-3836-9.

29. Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру. "Мир", М.- 1972.
`https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/AtjaMakdonald1972ru.pdf`
M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969). xx IX+128 pp. DOI: https://doi.org/10.1017/S0008439500031039

30. M. Hochster, Cohen-Macoley rings,
`http://www.math.lsa.umich.edu/~hochster/615W14/CM.pdf`

31. Н. Бурбаки, Коммутативная алгебра, М.: Мир, 1971, 707 стр.
`https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Burbaki1971ru.pdf`
N. Bourbaki, Commutative Algebra, Chapters 1-7, Springer-Verlag, New York, 1985.

32. A. Ogus, Commutative Algebra,
`https://math.berkeley.edu/~ogus/Math_250B-2016/Notes/koszul.pdf`